Geometriai transzformációk, transzformációs egyenletek és alkalmazásuk a geoinformatikában

Szakdolgozat

Bódis Katalin

Szeged
1999

Tartalomjegyzék

Bevezetés ... 3
1. Feladatok ... 5
  1.1 A Föld felszínének síkba való leképezése ... 5
  1.2 Koordináta-rendszerek, vetületi rendszerek közötti átjárások ... 11
  1.3 Különböző rendszerű adatforrásokból származó adatok együttes kezelése ... 12
  1.4 A harmadik dimenzió ... 15
2. Az eszköztár: Geometriai transzformációk ... 16
  2.1 A geometriai transzformáció fogalma ... 16
  2.2 Egybevágósági transzformáció ... 18
  2.3 Hasonlósági transzformáció ... 21
  2.4 Affin transzformáció ... 24
    2.4.1 Az affin transzformáció fogalma ... 24
    2.4.2 A tengelyes affinitás ... 24
    2.4.3 Az osztóviszony ... 25
    2.4.4 Az affinitás megadása ... 26
  2.5 Transzformációs egyenletek ... 27
    2.5.1 Lineáris koordináta-transzformációk ... 30
    2.5.2 Homogén koordináták ... 35
  2.6 Magasabb rendű, polinommal megadott transzformáció ... 37
    2.6.1 A transzformáció foka ... 37
    2.6.2 A lineáris egyenletrendszer megoldhatósága ... 38
    2.6.3 Az RMS hiba ... 40
3. Alkalmazás ... 42
4. Irodalomjegyzék ... 47
5. Ábrajegyzék ... 48

Bevezetés

A mindennapi élet számos területén egyre gyakrabban szükség van arra, hogy a tartalmazó földrajzi közeggel együtt vizsgáljunk bizonyos információkat. A társadalmi és gazdasági szervezeteknél ezek az antropogén környezet felmérésére, tervezésére, a természeti környezet folyamatos megfigyelésére és kezelésére, az emberi beavatkozások eddigi és potenciális hatásának kutatására, a közlekedés és kereskedelem optimális szervezésére, a társadalmi-gazdasági folyamatok feltárására, a társadalom struktúrájának vizsgálatára irányulhatnak.

Ezen összetett feladatok igénylik az információk térbeli feldolgozását, ami a hatalmas mennyiségű adat kezelése miatt ma már elképzelhetetlen a számítástechnika adta lehetőségek kihasználása nélkül. Ennek az eredménye a földrajzi információs rendszerek (Geographical Information Systems – GIS) megalkotása, fejlesztése. A geoinformatika ezeknek a rendszereknek egyik fontos technikai összetevője, csakúgy, mint a távérzékelés, amely új összefüggéseket tár fel és további feldolgozandó információkat szolgáltat. A geoinformatikában adatainknak térben pontosan meghatározottnak kell lenniük. Ennek biztosításához sokszor különböző geometriai transzformációkat kell elvégezni.

A geometriai transzformációk közül a sík azon transzformációit igyekeztem bemutatni dolgozatomban, amelyek a geoinformatikai és távérzékeléses módszerekkel történő kutatások során az adatelőkészítéstől a megjelenítésig előfordulhatnak. A dolgozat célja a geometriai transzformációk tárgyköréből egy olyan ismeretanyag összeállítása, amely a tudományterülettel mélyebben nem foglalkozó, de annak lehetőségeit munkája során gyakran alkalmazó szakember számára tudatosabbá, s így könnyebbé teheti az „eszköztárból való válogatást”. Célomat a szükséges fogalmak meghatározásával, a fontosabbnak vélt tételek ismertetésével és alkalmazási példák megadásával gondoltam megvalósítani. A célkitűzésnek megfelelően nem éreztem szükségesnek a felhasznált matematikai összefüggések igazolását.

Az első fejezet olyan feladatoknak – és az azokat meghatározó előzményeknek, körülményeknek – a megfogalmazása, amelyekkel azonnal szemben találja magát az, aki geoinformatikai vagy távérzékeléses módszerekkel kíván földrajzi alapú adatbázist kiépíteni.

Egy ilyen adatbázis összeállításakor nagyon sok szempont szerint lehetne sorolni a felmerülő kérdéseket, ezek közül a térbeli-geometriai jellegűeket próbálja meg összefoglalni a dolgozat első része.

A földrajzi jellegű adatok, a térbeliség – az a kívánság, hogy adatainkat elhelyezhessük a fizikai földrajzi térben, méréseink alkalmával adott mértékegységet használhassunk, egységes koordináta-rendszerben, közös méretarányban jeleníthessük meg azokat, majd a különböző geoinformatikai és távérzékeléses műveletek során a vizsgált területről teljesen új információk birtokába juthassunk – kialakítja a geometria, a geometriai transzformációk ismerete iránti igényt. Ezekkel foglalkozik a második fejezet.

A harmadik fejezetben egy-egy alkalmazást láthatunk, amelyben egy digitalizált térkép és egy műholdfelvétel helyes geometriai korrekció után, azonos méretarányban fedésbe kerülve alkalmasak további adatnyerésre.

1. Feladatok

1.1 A Föld felszínének síkba való leképezése

A Föld fizikai alakját – mely nem írható le semmilyen zárt matematikai formulával – olyan elméleti földalakokkal modellezik, amelyek már megadhatóak matematikai függvényekkel, ugyanakkor a valóságot megfelelően közelítik.

A Föld alakjának elsődleges megközelítője a geoid, amely a nehézségi erőtér potenciáljának a közepes tengerszinttel egybeeső felülete. Ez a potenciálfelület sem jellemezhető még egyenletekkel. A közelítés második foka az ún. normál szferoid (sarkoknál belapult alak), amely a Föld forgása miatt fellépő centrifugális erő okozta tömegelrendeződés eredménye. Felülete a képzelt nehézségi erő potenciálfelülete, amely megadható ugyan egyenletekkel, de azok még túl bonyolultak ahhoz, hogy a szferoid térképi vetületek alapfelületeként szolgáljon. A földalak megközelítésének harmadik foka a forgási ellipszoid. Helyes alak és méret megválasztása mellett a normál szferoiddal szemben kevés eltérést mutat, egyenlete viszont egyszerűbb, így alkalmas arra, hogy térképi vetületek alapfelülete legyen. Kisebb területek felmérése esetén gyakran alkalmazzák vetületi alapfelületnek a forgási ellipszoidot az ábrázolandó terület közepe táján érintő simulógömb felületét. Helyi jellegű felméréseknél közvetlenül síkfelülettel is helyettesíthetik a Földet. A térképi vetületek tehát alapfelületként a földi ellipszoidot vagy gömböt, képfelületként általában a síkot vagy valamilyen síkba fejthető felületet, kúp- vagy hengerpalástot használnak.

Két, matematikailag meghatározott felület – legyen az egyik az alapfelület (*A*) a másik a képfelület (*K*) – paraméteres egyenletei:

$$A:\ \begin{aligned} x &= f_1(u;v) \\ y &= f_2(u;v) \\ z &= f_3(u;v) \end{aligned} \qquad\qquad K:\ \begin{aligned} \hat{x} &= g_1(p;q) \\ \hat{y} &= g_2(p;q) \\ \hat{z} &= g_3(p;q) \end{aligned}$$

Ha az alapfelület és a képfelület egyenleteinek paraméterei között megfelelő matematikai összefüggést adunk meg, melyet a $p = F_1(u;v)$, $q = F_2(u;v)$ egyenletekkel fejezünk ki, akkor olyan kapcsolatot állítottunk fel a két felület pontjai között, amely szerint az alapfelület minden pontjának van megfelelője a képfelületen. A paraméterek közötti összefüggések (vetületi egyenletek) meghatározzák a vetület törvényszerűségeit, de a térképi ábrázolás szempontjából ki kell kötni, hogy az alapfelület és a képfelület pontjai között kölcsönösen egyértelmű (bijektív) megfeleltetést kell létesítsenek, legalábbis az ábrázolandó terület pontjainak esetében. Az előző összefüggések alapján a behelyettesítést elvégezve olyan paraméteres egyenleteket kapunk, amelyekben az alapfelület paramétereinek és a vetületi egyenletek ismeretében jutunk a képfelület egyenleteihez:

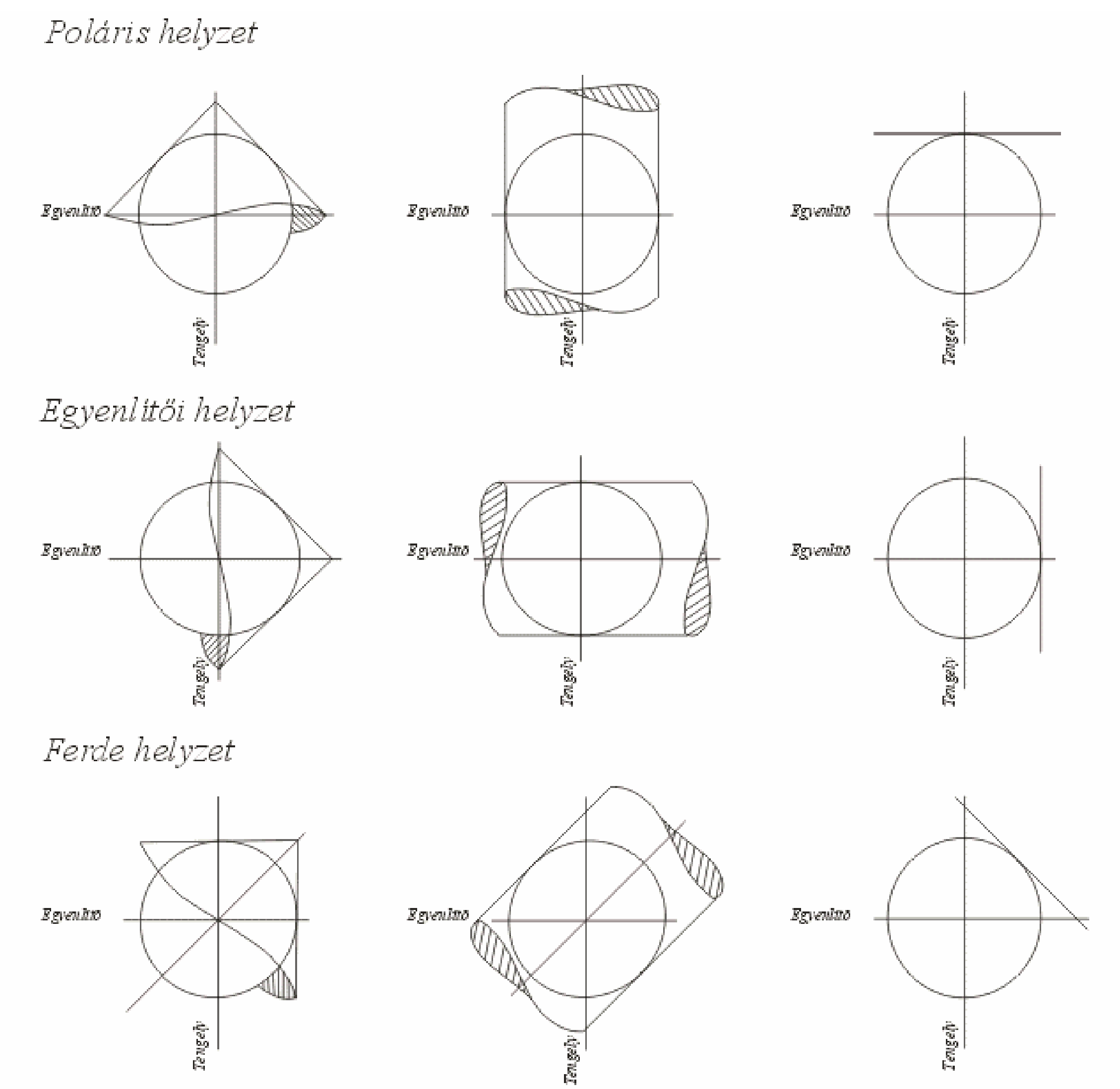
$$\widehat{x} = G_1(u;v)$$
$$\widehat{y} = G_2(u;v)$$
$$\widehat{z} = G_3(u;v)$$

A földfelszín szemléletes folytonosságának megfelelően – kivéve az olyan speciális eseteket, mint pl. egy függőleges, vagy áthajló sziklafal – a vetületi összefüggést megadó függvényeknek folytonosnak kell lennie.

Az összefüggések megadása során figyelemmel kell lenni arra, hogy a vetítésből származó torzulások megadott érték alatt maradjanak. Pl. a geodéziai felméréseknél alkalmazott szögtartó vetületek esetén kikötés, hogy a hossztorzulás sehol nem haladhatja meg a hossz egy tízezred részét – a hossztorzulás így kilométerenként legfeljebb 10 cm lehet.

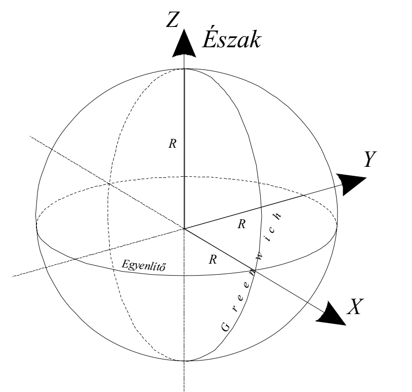
A torzulások a geodéziai mérések alapelemeit, a szögeket (irányokat), hosszakat és a területeket érintik. A vetületeket torzulási sajátosságaik szerint csoportosítva beszélhetünk általános torzulású, távolságtartó, szögtartó és területtartó vetületről. Például a területtartó vetületeken adott területű körök mindig azonos területű felszíni területeket jelölnek, s bár a területek itt egyenlők, a területek alakjai, a szögek torzulhatnak. Szögtartás esetén az alapfelületen lévő alakzat és a képe hasonlóak lesznek. Általános torzulású vetületben a hosszak, szögek és területek is torzulnak. Távolságtartó vetület nincs. Távolságtartás csak a vetületben meghatározott lineamentum mentén érvényesülhet.

A vetületeket további csoportokba lehet sorolni az alapján, hogy csak képlettel adhatóak-e meg (képzetes vetületek), vagy előállíthatóak geometriai úton is (valódi vetületek). A valódi vetületek szemléletesen megismerhetőek arról, hogy meridiánképei egy pontból kiinduló, állandó szögtávolságú sugársorok. A paralelkörök képei a kiinduló ponttal koncentrikus körívek. A képzetes vetületek meridiánképei és paralelkörképei többnyire nem merőlegesek egymásra. Elkülönítési szempont, hogy a vetületnek van-e vetítési központja és ha igen, akkor ez véges pont-e vagy pedig a végtelenben van. Síkvetületek esetében a vetítés központja elhelyezkedhet a Föld középpontjában (centrális vagy gnomonikus vetület), a felszínen az ábrázolt síkkal szemben (sztereografikus vetület), a végtelenben (ortografikus vetület), valahol a Föld belsejében (intern vetület) vagy a Földön kívül (extern vetület). Elkülönítési szempont lehet az alap- (gömbi vagy ellipszoidi) és képfelület (kúp, henger, sík, gömb) milyensége valamint egymáshoz viszonyított helyzete helyzetük (poláris, egyenlítői vagy ferde tengelyű kúp, henger vagy síkvetületek. A képfelület az alapfelülethez képest lehet érintő, metsző és lebegő helyzetben (1. ábra).

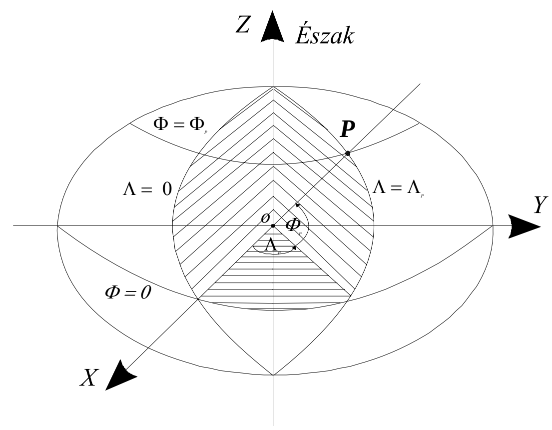


1. ábra Az alapfelület és a képfelület helyzetének kapcsolata

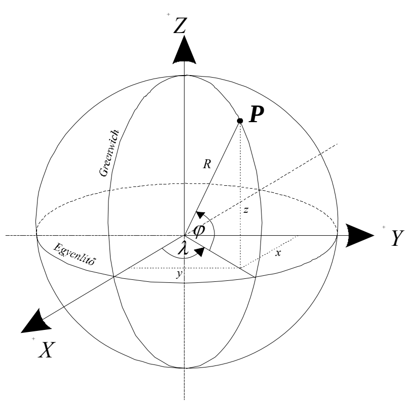
A felszín egy pontjának azonosítását három koordinátájának meghatározásával tehetjük meg. A különböző koordináta-rendszerek (geocentrikus, ellipszoidi felületi, gömbfelületi, síkfelületi, stb. (2. ábra) megalkotása, a jól használható síkfelületi koordinátákat eredményező, az elméleti földalakokat alapul vevő, vetítéssel, vetítésekkel kapott, alacsony illetve a célnak megfelelő, ismert torzulású sík-, kúp-, és hengervetületek, valamint a nagy területeket egységesen lefedő vetületi rendszerek kidolgozása a térképészek feladata.



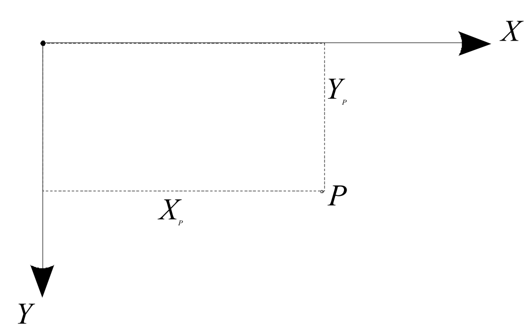
Geocentrikus koordináta-rendszer



Ellipszoidi földrajzi koordináták



Gömbfelületi pont koordinátái

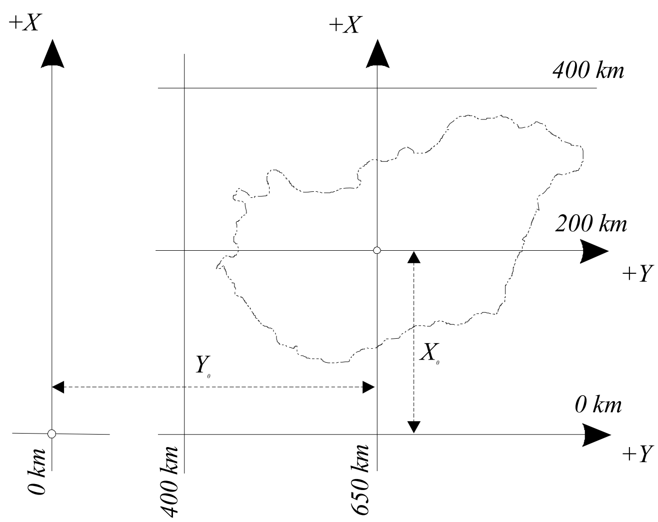


Pont síkkoordinátái

2. ábra A különböző koordináta-rendszerek

A Nemzetközi Geodéziai és Geofizikai Unió (International Unio of Geodesy and Geophysics – IUGG) által elfogadott földmodell, az ún. World Geodetic System 1984WGS84 az alapja a geocentrikus koordinátákkal dolgozó, műholdas méréseken alapuló globális hely- és időmeghatározó rendszernek (Global Positioning System – GPS.) Ezek segítségével nagy pontossággal meghatározhatjuk a felszíni vagy felszínhez közeli pontok földrajzi koordinátáit, tengerszint feletti magasságát és az időt. Az amerikai navigációs rendszer (NAVigation System with Time And Range – NAVSTAR) – amely az amerikai védelmi minisztérium és a légierő kezelésében van – teljes kiépítéskor 24, kb. föld-középpontú körpályán keringő műhold segítségével biztosítja a helymeghatározást, amely akkor sikeres, ha a 6 különböző pályán, 20200 km magasságban keringő műholdak közül legalább 4 műholdról – radiometriai értelemben – látszik a földi megfigyelőpont. Az amerikaihoz hasonló helymeghatározó rendszer az orosz GLONASS (GLobal Orbiting and NAvigation Satellite System). A földi vevőkészülékek elsődlegesen geocentrikus koordinátákkal azonosítják a bemért pontot, majd rendszertől függően számítják át valamilyen vetületbe azokat.

Ellipszoid felületi rendszerek az alapjai a legelterjedtebb vetületi rendszereknek; a Gauss-Krüger-rendszernek (Kraszovszkij-féle ellipszoid) és a Universal Transverse Mercator (UTM) rendszernek (Hayford-ellipszoid), mely koordináta-rendszereket világkoordináta-rendszereknek is neveznek. Mindkettő szögtartó hengervetület. Magyarországon szintén használják az említett rendszereket, pl. a 1984WGS84 geocentrikus rendszert GPS-méréseknél, a Gauss-Krüger rendszer a katonai térképészetben, az UTM-rendszert a távérzékelésben. A hazai polgári térképezés sajátos vetületi rendszere az Egységes Országos Vetület (EOV), amelyet kettős vetítéssel (ellipszoidról annak simulógömbjére, majd a gömbről síkra) kapnak. A Nemzetközi Geodéziai és Geofizikai Unió (IUGG) által 1967-ben javasolt IUGG/1967 elnevezésű forgási ellipszoid adja az alapfelületet, erről vetítenek arra a 6379,743 m sugarú gömbre, amely Budapest környékén simul legjobban az ellipszoidhoz. A gömbről vetítés olyan ferde tengelyű, süllyesztett hengerpalástra történik, amely az ország területén épp hogy metszi a gömböt. A henger tengelye merőleges a Gellérthegyen átmenő hosszúsági kör és a $47^{o}06'$ északi földrajzi szélességi kör metszéspontján átmenő gömbi főkör síkjára. A hossztorzulás a kelet-nyugati irányú y tengely mentén kilométerenként –7 cm, az ország legészakibb pontján +26 cm, legdélibb pontján +23 cm. A területtorzulás a hossztorzulás-értékek négyzetével egyenlő. Az Egységes Országos Vetület szögtartó. Ebben a vetületben készül el az országot lefedő Egységes Országos Térkép Rendszer (EOTR), amely szelvényezés koordináta-rendszerének origója az országtól DNy-ra található, így – mivel az ország teljes területe a koordináta-rendszer első síknegyedébe esik – minden pont mindkét koordinátája pozitív (3. ábra). Magyarország területén az x koordináták mindig kisebbek 400000 méternél, az y koordináták mindig nagyobbak 400000 méternél, így a koordináták felcserélésének hibalehetősége is csökken.



3. ábra Magyarország helyzete az Egységes Országos Vetületi Rendszer (EOV) koordináta-rendszerében

1.2 Koordináta-rendszerek, vetületi rendszerek közötti átjárások

Az eltérő vetületű adatforrásokból származó információkat egy rendszerre vonatkoztatva kell megadnunk ahhoz, hogy egy adott – geometriailag koordinátákkal meghatározott – területre jellemző leíró adatokat egy adatbázisban kezelhessük. Ha pl. a domborzatra vonatkozó magassági adatokat digitalizálás útján Gauss-Krüger-rendszerben készült katonai topográfiai térképek szintvonalairól vesszük, az út- és településhálózat digitális térképéhez EOV-ben készült térképek szolgálnak alapul, a területhasznosítás térképezéséhez UTM-rendszerbe vetített űrfelvételeket használunk és ráadásul néhány – korábban nem térképezett, de számunkra fontos – objektum helymeghatározásához a geocentrikus vonatkoztatási rendszerrel dolgozó GPS-t használjuk, akkor adataink egységes rendszerben való, egyidejű felhasználásához igazán szükség van a geometriai transzformációk ismeretére, azok alkalmazására. Szerencsére az egyes vetületi rendszerek közötti átszámításokra – igazolva ezzel előfordulásuk gyakoriságát és fontosságát – külön kisebb-nagyobb programokat írtak, sőt, az általánosan elterjedt, világszerte használt vonatkoztatási rendszerek közötti koordináta-transzformációk beépített moduljai a jelentősebb térinformatikai- és távérzékeléses-képfeldolgozó rendszereknek. Az 1. táblázat a lehetséges átszámítások közül a leggyakoribbakat említi.

1. táblázat Fontosabb vetületi rendszerek közötti átszámítási módszer

Honnan	**Hova**	**Módszer**	**Általános megadás ***
Ellipszoidi rendszer	Síkfelületi rendszer	Vetítés	$x = f_1\,(\Phi,\Lambda)$ $y = f_2\,(\Phi,\Lambda)$
Gömbfelületi rendszer	Síkfelületi rendszer	Vetítés	$x = f_3\,(\phi,\lambda)$ $y = f_4\,(\phi,\lambda)$
Síkfelületi rendszer	Síkfelületi rendszer (megegyező alapfelület)	1) Indirekt transzformáció két lépésben ** 2) Transzformációs egyenletek	pl. gömbfelületi rendszer esetén i) inverz függvény $\phi = g_3\,(x , y)$ $\lambda = g_4\,(x , y)$ ii) új, síkfelületi egyenlet $x = f_5\,(\phi,\lambda)$ $y = f_6\,(\phi,\lambda)$
Síkfelületi rendszer	Síkfelületi rendszer (eltérő alapfelület)	Transzformációs egyenletek (egyenleteket ld. később)	- hasonlósági transzformáció - affin transzformáció - magasabb fokú polinomok

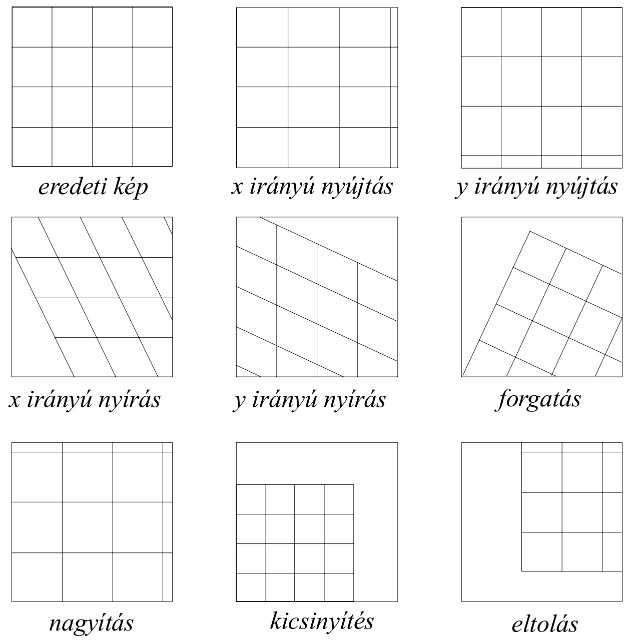
* A $\Phi,\Lambda,\phi,\lambda$ szögek helyzetét a 2. ábra szemlélteti, az $f_{1\text{-}6}$, $g_{3\text{-}4}$ függvények

** Az indirekt transzformáció elvégzéséhez ismerni kell a közös alapfelület geometriai jellemzőit és a felhasznált vetületek egyenleteit. Ezek hiányában kontrollpontok alapján, egyenletekkel transzformálhatunk.

1.3 Különböző rendszerű adatforrásokból származó adatok együttes kezelése

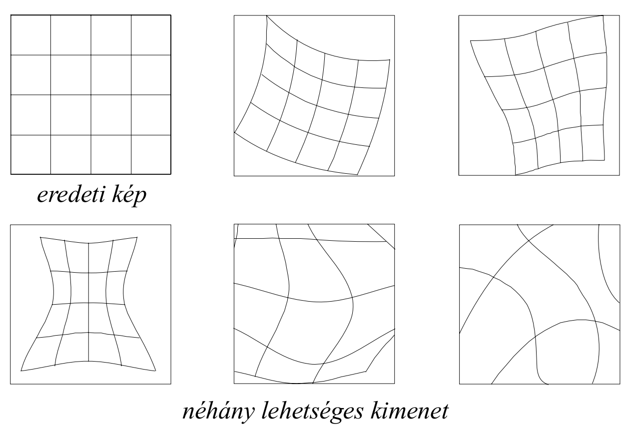
Geoinformatikai és távérzékeléses módszerekkel történő vizsgálódások során az objektumok jellemzését szolgáló geometriai és leíró (attribútum) adatok – mint az előzőekben is említettük – igen eltérő eredetű, más-más jellegű adatforrásokból származhatnak. A geometriai transzformációk szempontjából az adatnyerési eljárások közül most a fizikai hely minél pontosabb meghatározását szolgáló geometriai adatok gyűjtése fontos elsősorban a leíró jellegű adatokkal szemben. Az adatok feldolgozása számítógéppel történik és digitális formában való előállításuk során két fázist lehet elkülöníteni. Az elsőben a geometriai adatok forrása közvetlenül a vizsgált objektum vagy annak képe. Ilyen elsődleges adatnyerési eljárások pl. a földi geodéziai mérések, a műholdas helymeghatározások, a fotogrammetriai módszerek, a távérzékelés. A másodlagos adatnyerési módszerek az elsődleges módszerek mérési eredményein alapuló, analóg vagy már digitális formában is létező adatforrásokat használják fel. Ebben az értelemben tehát egy – a földmérési adatok alapján megszerkesztett – térkép kézi digitalizálása, szkennelése, vagy pl. diszkrét pontokra vonatkozó, digitális formában már meglévő adatok átvétele másodlagos adatnyerési módszernek minősül. Az adatnyerési módszerek szintjeit az adatok további feldolgozásához szükséges, alkalmas geometriai transzformáció kiválasztásához is lényeges ismerni.

Hasonlósági vagy affin geometriai transzformációt (elsőfokú vagy lineáris transzformációk) célszerű használni nyers légi- és űrfelvételek térképi vetületbe való vetítésekor, digitális térképek, légi- és űrfelvételek tájolásakor, már síkra vetített, de még ismert vetület nélküli műholdfelvételek (pl. a SPOT és a Landsat *Level 1B* adatai) vetületi rendszerbe való elhelyezésekor. Affin transzformációt érdemes használni térképi síkvetületek másik síkfelületi vetületben való megadásakor viszonylag nem nagy területen dolgozva. Szintén affin transzformációt kell használnunk digitalizált térképi állományok ún. táblai koordináta-rendszeréből valamely kiválasztott vetület koordináta-rendszerébe való áttéréskor is. Több térképlap digitalizálása esetén az egyes darabokon elvégzett koordináta-transzformáció után a szomszédos területek szintén a hasonlósági transzformációk révén (speciálisan eltolással) kerülnek egymás mellé. Ezt a funkciót a képfeldolgozás a képek összeillesztésekor (mozaikolás) használja. Hasonlósági transzformációt használunk olyan műveletekkor is, amikor méretarányt változtatunk vagy keresés, szerkesztés közben „rá-zoom-olunk” az érdekes jelenségre. A lineáris transzformációk hatását szemlélteti a 4. ábra.



4. ábra Lineáris transzformációk hatása

Másod- vagy magasabb fokú transzformációt (nemlineáris transzformáció) alkalmazunk nemlineáris torzulások esetén (5. ábra). Ilyen pl. a magasról készült, nagy területet lefedő felvételeknél a kamera lencséje okozta, adott irányú torzulás. Ezt másodfokú transzformációval korrigálják. Harmadfokú transzformációval torzult légifelvételeket, radarfelvételeket, negyedfokú transzformációval erősen torzult légifelvételeket korrigálnak.

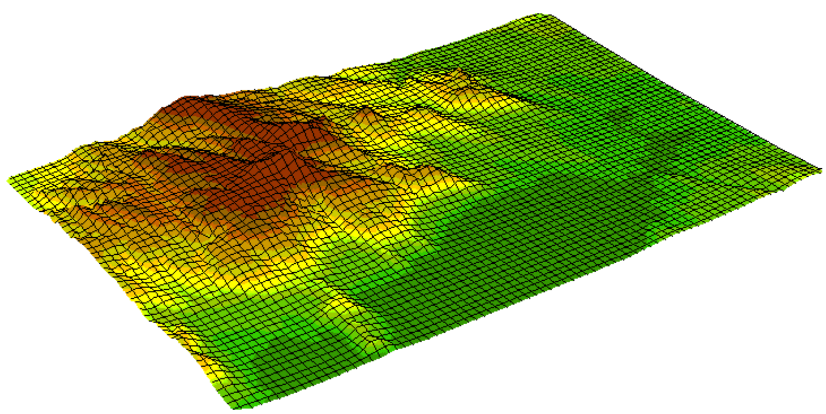


5. ábra Nemlineáris transzformációk hatása

A transzformálási művelet célja mindig az, hogy az eredeti képi adatállományt olyan formába hozzuk, amely a további feldolgozáskor alkalmassá teszi az adatokat a geoinformatikai funkciókra, műveletekre. Az adatkezelés, a lekérdezés, a helyes elemzés és megjelenítés csak ismert vetületben, ismert koordináta-rendszerben történhet eredményesen. Már meglévő rendszer bővítése vagy frissítése is csak a transzformált rendszerben mehet végbe. Az adatelemzés eszközeként használt logikai-, aritmetikai-, geometriai- vagy matematikai statisztikai műveletek sem képzelhetőek el nyers, legfeljebb a leíró adatokat tartalmazó, korrigálatlan állományokon. Szükségünk van koordinátákra, a méretarány és a mértékegység ismeretére a további adatnyerést szolgáló mérések alkalmával, a helykiválasztási, övezetgenerálási műveleteknél. Közös koordináta-rendszerben, azonos méretarányban kezelt képi adatok esetén végezhetjük el a vizsgált területre vonatkozó leíró adatok összehasonlítását, a körülményekre, az adott időbeli állapot felmérésére, a változásokra, előrejelzésre irányuló geoinformatikai műveleteket.

1.4 A harmadik dimenzió

A digitális domborzatmodellek (magassági modellek) vagy egyéb, a felszín pontjaira jellemző, egy-egy jelenséghez tartozó információk alapján megalkotott statisztikai felületek lehetőséget adnak olyan műveletek elvégzésére, amelyek csak a két dimenziót használva nem lehetségesek vagy túlságosan lassú és körülményes volna végrehajtani őket. A domborzat magassági adatai esetén a látványos, általában ortogonális axonometrikus megjelenítés (6. ábra) mellett fontos művelet a beláthatósági vizsgálatok elvégzése, a lejtőszögek, a lejtők kitettségi viszonyainak meghatározása, vízgyűjtőterületek lehatárolása, stb. A magassági adatokhoz hasonlóan normál eloszlásúnak kezelt egyéb adatokból szintén interpolálási eljárással kaphatunk felületeket, amelyek alapján izovonalakat tartalmazó adatállományt hozhatunk létre. Az adott méretarányban való megjelenítés, a magassági torzítás megadása, a mérési műveletek elvégzése a megelőző geometriai transzformációk miatt tehető meg.



6. ábra A Velencei-hegység 3D-s digitális domborzatmodellje

A modellek alkalmazási területe sokféle, az előállítás módja azonban közös. A síkfelületi rendszerbeli *(x;y)* koordinátákkal adott ponthoz a magassági értéknek, harmadik koordinátaként olyan értéket rendelhetünk, amely a ponthoz leíró adatként kapcsolódik. Egy-egy objektumhoz gyakorlatilag bármennyi leíró jellemző tartozhat. A geometriai transzformációk ezekre a leíró adatokra nincsenek hatással a korrekció során. Ez a tulajdonság teszi lehetővé, hogy adataink geometriai korrigálását elvégezhessük csak a sík transzformációival illetve, hogy jelen dolgozat szintén csak ezekkel foglalkozzon...

2. Az eszköztár: Geometriai transzformációk

2.1 A geometriai transzformáció fogalma

Definíció: A geometriai transzformáció olyan leképezés, amellyel minden ponthoz vagy valamely ponthalmaz minden pontjához hozzárendelünk egy-egy pontot.

Definíció: Ha egy ponthoz (tárgypont) a transzformáció egy pontot (képpont) rendel, azt mondjuk, hogy ezek megfelelő (homológ) pontok.

Egy alakzathoz (tárgy) az alakzat pontjaihoz tartozó képpontokból álló alakzatot (kép) rendeljük hozzá. Az alakzat transzformálása a képalakzatra való áttérést jelenti. A legegyszerűbb példa a transzformációra az identikus leképezés, a helybenhagyás, amely minden ponthoz önmagát rendeli.

Definíció: Egy transzformációt közönségesnek nevezünk, ha más-más tárgyponthoz más-más képpontot rendel. A sík vagy tér transzformációja elfajuló, ha a teljes sík képe lineáris alakzat, illetve a teljes tér képe síkbeli alakzat lesz.

Közönséges transzformációnak van ellentétes (inverz) transzformációja, amely a képponthoz rendeli a tárgypontokat. A továbbiakban – a jelző nélküli – transzformáció elnevezést fogjuk használni a közönséges transzformációk esetében.

Definíció: Egy φ transzformáció inverze az a leképezés (φ^{-1}), amely egy ponthoz azt a pontot rendeli, amelyhez a φ az adott pontot rendeli.

$$\varphi : A \to \varphi(A) = A'$$
$$\varphi^{-1} : A' \to \varphi^{-1}(A') = \varphi^{-1}\big(\varphi(A)\big) = \big(\varphi^{-1}\varphi\big)(A) = \iota(A) = A$$

Bizonyítható állítás, hogy egy transzformáció inverze szintén transzformáció, valamint hogy egy transzformáció és inverzének egymásutánja az identikus transzformációt adja. Jelölje pl. ρ_C a C középpontú, α szögű elforgatást, ρ_C^{-1} az ellentétes transzformációt. Egymás után elvégezve a két transzformációt identitást kapunk:

$$\rho_C^{-1}\big(\rho_C(P)\big) = \rho_C^{-1}(P') = P$$
$$\rho_C^{-1}\big(\rho_C(P)\big) = \big(\rho_C^{-1}\rho_C\big)(P) = \iota(P) = P$$

Definíció: Az olyan transzformációt, amely megegyezik az inverzével involúciónak nevezik. Pl.: a t tengelyre vonatkozó tengelyes tükrözés – jelöljük σ_t-vel – inverze szintén a t tengelyre vonatkozó tengelyes tükrözés: $\sigma_t = \sigma_t^{-1}$. A definícióból és a transzformációk egymás utáni elvégzéséből adódik, hogy involutórikus transzformációk négyzete az identikus leképezés.

A geometriai transzformációk – magához a geometriához hasonlóan – tárgyalhatóak elemi geometriai szemléletben és analitikus módon. Földrajzi alkalmazások során a transzformálandó objektumok általában koordinátákkal adottak, így elsősorban koordináta-transzformációk elvégzésére van szükség, amelyeket a kívánt transzformációt megadó egyenletek (polinomok) és a hozzájuk tartozó, ún. transzformációs mátrixok segítségével tudunk elvégezni. Az egyes transzformációkról alkotott képzetünket azonban főként az elemi geometriai szemlélet alakította ki. A koordináta-rendszer bevezetése után a rendszerben elhelyezett és koordinátákkal azonosított objektumokon már e szemlélet szerint, de az analitikus módszerekkel hajtjuk végre a transzformációt.

A geometriai transzformációkat csoportosíthatjuk tulajdonságaik szerint.

Definíció: Egy transzformáció egyenes tartó, ha a transzformáció mellett egy e egyenes képe valamely e' egyenes.

Definíció: Egy transzformáció távolságtartó, ha a tárgypontok távolsága és a transzformáció melletti képpontok távolsága megegyezik:

Adottak az A, B pontok és a φ transzformáció. $\begin{matrix} \varphi : A \to \varphi(A) \\ \varphi : B \to \varphi(B) \end{matrix}$.

Távolságtartó transzformáció esetén $d(A,B) = d(\varphi(A), \varphi(B))$.

Hasonlóan értelmezhetjük a szakasztartó, szögtartó, párhuzamosságtartó, területtartó transzformációkat is.

Definíció: Fixpont: a pont és a transzformáció melletti képe megegyezik.

Definíció: Fix egyenes: olyan egyenes, amelynek minden pontja fixpont.

Definíció: Invariáns egyenes: olyan egyenes, amely megegyezik a transzformáció melletti képével. (Az invariáns egyenes általában nem fix egyenes.)

2.2 Egybevágósági transzformáció

A legspeciálisabb és egyben a legegyszerűbb geometriai transzformációk az egybevágóságok. Ide tartozik a transzformációk triviális példájaként említett identikus transzformáció, a helybenhagyás is, valamint az általános- és középiskolai tanulmányok során megismert tükrözések, forgatások, eltolások és ezek egymásutánjaiként kapott transzformációk.

Definíció: A távolságtartó leképezést egybevágóságnak nevezzük.

Az egybevágóság különböző pontokhoz különböző pontokat rendel, hiszen $A \neq B$ esetén, ha a transzformáció utáni $\varphi(A)$ egyenlő volna $\varphi(B)$-vel, akkor a távolságokra a következő összefüggés lenne érvényes: $d(A,B) \neq d(\varphi(A),\varphi(B))$, ilyen esetben azonban a definíció értelmében nem beszélünk egybevágóságról. Ebből következik, hogy az egybevágóságnak van inverze és az is egybevágóság.

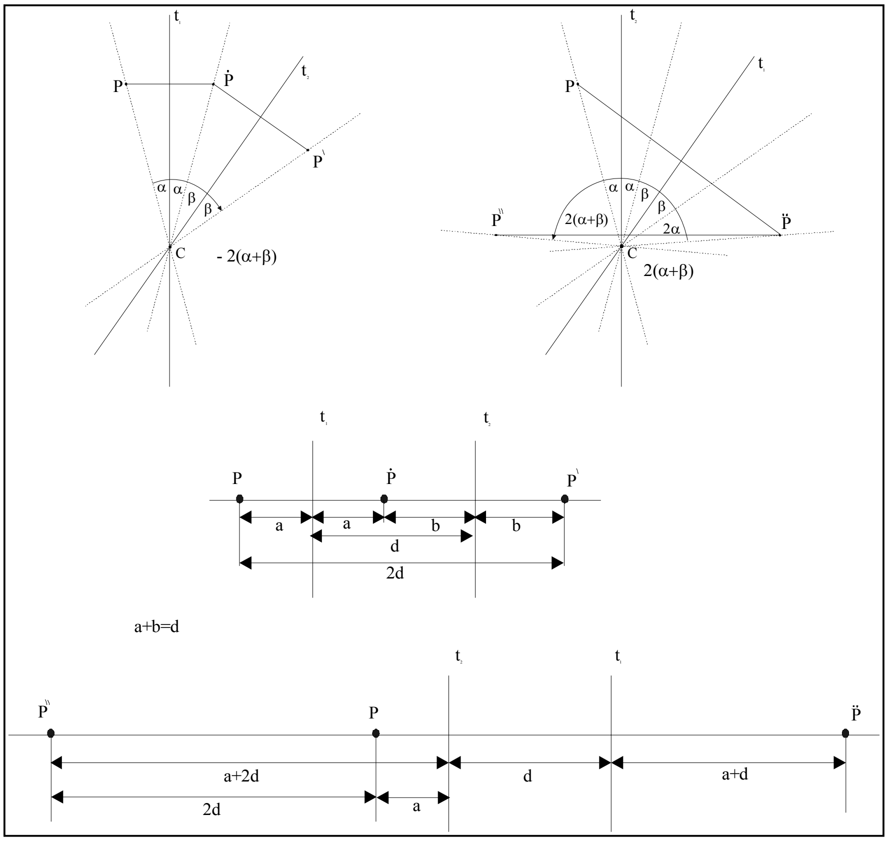
Definíció: Két – nem feltétlenül különböző – alakzat egybevágó, ha van olyan egybevágóság, amely az egyiket a másikba viszi át.

Az egybevágóságok speciális esetei a tengelyes tükrözés, a pont körüli elforgatás, a középpontos tükrözés és az eltolás. Ezen transzformációk néhány jellemző tulajdonságát foglalja össze a 2. táblázat.

Definíció: A körüljárási irányt megtartó egybevágóságokat mozgásnak nevezzük.

A pont körüli elforgatás, a középpontos tükrözés és az eltolás szemléletesen olyan, mintha az egész tartalmazó síkot (vagy teret) elmozgatnánk az alakzattal együtt.

Belátható, hogy a sík mozgásai előállíthatók két tengelyes tükrözés egymás utáni elvégzésével (szorzatával). Két párhuzamos egyenesre vonatkozó tükrözés szorzata eltolás. Az eltolás iránya merőleges az egyenesekre, nagysága a tengelyek távolságának kétszerese. Két, közös ponttal rendelkező egyenesre vonatkozó tükrözés egymásutánja a két egyenes metszéspontja körüli elforgatásnak felel meg, ahol az elforgatás szöge a két egyenes által bezárt szög kétszerese, iránya pedig a tükrözés sorrendjétől függ. Speciálisan 180^o-os elforgatást (középpontos tükrözést) eredményez két, egymásra merőleges egyenesre való tükrözések egymásutánja. Az elforgatás középpontja, (illetve a középpontos tükrözés centruma) a két egyenes metszéspontja (7. ábra).



7. ábra Mozgások előállítása két tükrözés szorzataként

Az egybevágóságokra vonatkozó, bizonyítható tétel, hogy a sík tetszőleges egybevágósága előállítható legfeljebb három tengelyes tükrözés szorzataként. Szintén bizonyítható, hogy három tengelyes tükrözés szorzata akkor és csak akkor helyettesíthető egyetlen egyenesre vonatkozó tükrözéssel, ha a három tengely párhuzamos, vagy egy pontra illeszkedik.

Definíció: A sík valamely három egyenesre tükrözését valódi három egyenesre tükrözésnek nevezzük, ha nem redukálható egy egyenesre való tükrözésre.

Definíció: Legyen adott az egymástól különböző *a, b*, és *c* egyenes a síkban úgy, hogy *a* és *b* párhuzamosak, a *c* pedig merőleges rájuk. Ekkor a $\varphi = \sigma_c \circ \sigma_b \circ \sigma_a$ egybevágóságot csúsztatva tükrözésnek nevezzük.

A csúsztatva tükrözés valódi három egyenesre tükrözés, s nem egyezhet meg az identitással.

2. táblázat Egybevágóságok néhány tulajdonsága

	előállítható-e síkmozgásként	hogyan adható meg a transzformáció	egyenes és képe közötti kapcsolat	van-e fix pont, fix egyenes, invariáns egyenes	körüljárási irány megtartása
tengelyes tükrözés	nem	– tengellyel (adott egyenes) – pont és képének megadásával	– egyenes és képe általában nem párhuzamos – a tengellyel párhuzamos egyenesek párhuzamosok a képükkel	fix pont: a tengely pontjai fix egyenes: a tengely invariáns egyenes: a tengelyre merőleges egyenesek	nem
forgatás	igen	– a forgatás irányított α szögével és a forgatás O centrumával – pont és képének, valamint az elforgatás szögének megadásával – pont és képének, valamint az elforgatás centrumának megadásával	– egyenes és képe általában nem párhuzamos – csak 180^o-os forgatás esetén lesz párhuzamos az egyenes a képével (középpontos tükrözés)	fix pont: a centrum fix egyenes: nincs invariáns egyenes: nincs, csak 180^o-os forgatásnál	igen
középpontos tükrözés	igen	– tükrözés középpontjával – adott pont körüli 180^o-os elforgatással – pont és képének megadásával	– egyenes és képe mindig párhuzamos egymással	fix pont: a középpont fix egyenes: nincs invariáns egyenes: a középpontra illeszkedő egyenesek	igen
eltolás	igen	– eltolás vektorral – pont és képének megadásával	– egyenes és képe mindig párhuzamos egymással	fix pont: nincs fix egyenes: nincs invariáns egyenes: az eltolás vektorával párhuzamos egyenesek	igen

2.3 Hasonlósági transzformáció

Definíció: Hasonlóságnak nevezünk egy pont-transzformációt, ha bármely két pont képének a távolsága a pontok távolságával osztva mindig ugyanazt a nullától különböző hányadost adja. A képtávolságok és a megfelelő tárgytávolságok aránya adja a hasonlóság arányát.

Mivel távolságokról van szó, ezért a hasonlóság aránya pozitív szám.

A hasonlóság aránya ($\frac{\overline{O'P'}}{\overline{OP}} = \lambda$) alapján beszélhetünk kicsinyítésről, egybevágóságról és nagyításról.

Definíció: A hasonlóság $\begin{array}{l} \text{kicsinyítés, ha } \lambda < 1, \\ \text{egybevágóság, ha } \lambda = 1, \\ \text{nagyítás, ha } \lambda > 1. \end{array}$

A definícióból következik, hogy minden hasonlóságnak van inverz transzformációja, amely λ arányú hasonlóság esetében $\frac{1}{\lambda}$ arányú hasonlóság.

Szintén a definíció következménye, hogy két képtávolság aránya mindig megegyezik a hozzájuk tartozó tárgytávolságok arányával.

A hasonlóságra vonatkozó állítások bizonyításakor sokszor szükség van a párhuzamos szelők tételének ismeretére, amely a következő:

Ha egy szög szárait párhuzamosokkal metsszük, akkor az egyik száron keletkező szakaszok aránya megegyezik a másik száron keletkező megfelelő szakaszok arányával

Definíció: Két alakzat hasonló, ha van olyan hasonlósági transzformáció, amely az egyiket a másikhoz rendeli.

Bizonyítható, hogy ha egy alakzat minden egyes P pontjához azt a P' pontot rendeljük hozzá, amelyik egy rögzített O pontból induló OP félegyenesen van és amelyikre $OP' = \lambda\, OP$, ahol λ egy rögzített pozitív szám, akkor az így hozzárendelt pontok az eredetihez hasonló alakzatot alkotnak, vagyis a hozzárendelés hasonlóságot ad meg.

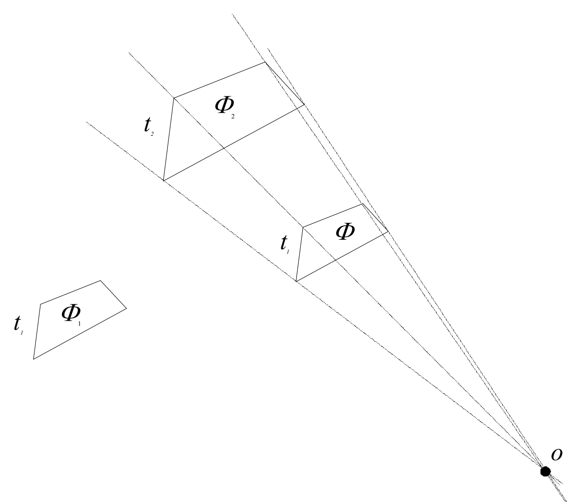
Definíció: Ha két hasonló alakzat esetében van olyan O pont, amely bármely megfelelő pontpárral együtt egy egyenesre illeszkedik, akkor centrális hasonlóságról beszélünk. Az O pont a hasonlóság centruma.

Az előbb megadott hasonlóság centrális hasonlóság, és melyet felhasználva belátható, hogy két hasonló síkbeli alakzathoz található a síknak olyan hasonlósága, amely a két alakzatot egymáshoz rendeli. Ha a hasonló síkbeli Φ_1, Φ_2 alakzatoknak t_1 és t_2 egy-egy megfelelő távolsága, akkor egy tetszőleges O pontot választva, a leírás alapján Φ_2-ből olyan Φ alakzatot tudunk készíteni, amelyben t_2-nek t_1 távolság felel meg. A Φ és Φ_1 alakzatok egybevágók, mert hasonlók és egy-egy megfelelő távolságuk egyenlő, tehát a hasonlóság aránya 1. Az egybevágóság definíciója szerint van olyan egybevágóság, amely a Φ és Φ_1 alakzatokat egymásba viszi. Ezt az egybevágóságot valamint a megadott hasonlóság inverzét egymás után alkalmazva a Φ_1 alakzatra a Φ_2 alakzathoz jutunk. Az eddigiek alapján belátható, hogy minden hasonlóság előállítható egy centrális hasonlóság és egy egybevágósági transzformáció egymás utáni elvégzésével. (8. ábra).

$\Phi_2 \to \Phi$ *: centrális hasonlóság* (γ_O)

$\Phi \to \Phi_1$ *: egybevágóság* (φ)

$\Phi_1 \to \Phi_2$: *a keresett hasonlóság:* $\gamma_O^{-1} \circ \varphi^{-1}$



8. ábra Hasonlóság előállítása egybevágóság és centrális hasonlóság egymásutánjával

Definíció: Két hasonló alakzat párhuzamos helyzetű, ha a megfelelő szakaszaikat tartalmazó egyenesek párhuzamosak egymással. Az olyan hasonlóságot, amely párhuzamos helyzetű alakzatokat rendel egymáshoz, párhuzamos hasonlóságnak nevezzük.

Az identikus transzformáció, az eltolás, a pontra vonatkozó tükrözés és az előzőekben megadott centrális hasonlóság párhuzamos hasonlóságok. Bizonyítható, hogy minden centrális hasonlóság egyben párhuzamos is, valamint ha egy párhuzamos hasonlóság nem eltolás, akkor centrális. Párhuzamos hasonlóságnál beszélhetünk a hasonlóság előjeles távolságáról is. Az azonosság előjeles aránya 1, a pontra vonatkozó tükrözésé -1, a megadott O középpontú centrális hasonlóság aránya λ, az O-ra tükrözve is $-\lambda$ arányú hasonlóságot ad meg.

A hasonlósági transzformáció fontos tulajdonsága a szögtartás. Ebből következik az is, hogy kollineáris pontoknak ugyanilyen pontok felelnek meg, tehát a hasonlóság egyenes tartó transzformáció.

A háromszögek hasonlósági alapeseteinek ismerete az alapja a hasonlósági transzformációk sokszögekre való alkalmazásának.
Két háromszög hasonló, ha

a) oldalaik aránya egyenlő,
b) két-két oldaluk aránya és az ezek által közbezárt szögük egyenlő,
c) két-két oldaluk aránya és e két-két oldal közül a nagyobbakkal szemközti szögük egyenlő,
d) két-két szögük páronként egyenlő.

Körök hasonlóságára vonatkozóan megállapítható, hogy minden két kör hasonló, mert az olyan hasonlóság, amelyik az egyik kör középpontjához a másik kör középpontját rendeli, s amelynek aránya a két kör sugarának aránya, az a két kört egymásba viszi.

2.4 Affin transzformáció

2.4.1 Az affin transzformáció fogalma

Definíció: Egy síknak önmagára vagy egy másik síkra való affin transzformációján (affinitásán) a sík egyenes tartó transzformációját értjük.

Megj.: A hasonlósági transzformációk, azon belül az egybevágóságok az affin transzformációk halmazának részhalmaza, mivel azok egyenes tartó transzformációk.

Affinitások szorzata is affinitás, ugyanis egyenes tartó transzformációk egymás utáni elvégzése során egyenes képe szintén egyenes kell legyen, ami a definíció szerint affin transzformációt jelent. Indirekt módon bizonyítható, hogy egy affinitás inverze is affinitás valamint, hogy az affinitás párhuzamosságtartó transzformáció.

2.4.2 A tengelyes affinitás

Definíció: Egy affinitás esetén tengelynek nevezzük az affinitásra fix egyenest.

Definíció: A sík önmagára való, nem identikus affinitását tengelyes affinitásnak nevezzük, ha van tengelye.

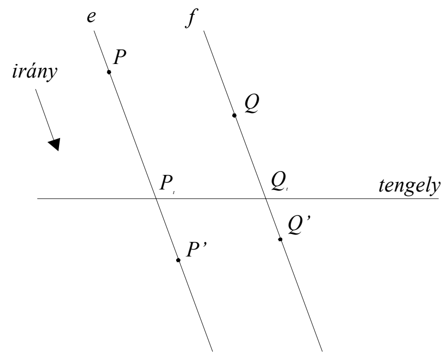
Pl.: a tengelyes tükrözés, mint affinitás esetében az affinitás tengelye a tükörtengely.

Belátható, hogy a sík önmagára való, nem identikus affinitásának legfeljebb egy tengelye van, ugyanis, ha van két tengely (t_1, t_2), akkor egy rájuk nem illeszkedő, tetszőleges P pontra is megmutatható, hogy fixpont, vagyis ha egy affinitásnak van két tengelye, akkor identikus transzformációról lehet csak szó.

Bizonyítható továbbá, hogy a tengelyes affinitásban az egymásnak megfelelő nem fix pontokat összekötő egyenesek párhuzamosak.

Definíció: A tengelyes affinitás megfelelő pontjait összekötő egyenesek irányát az affinitás irányának nevezzük.

Definíció: Ha a tengelyes affinitás iránya merőleges a tengelyre, akkor merőleges vagy ortogonális affinitásról, ha párhuzamos az affinitás iránya a tengellyel, akkor párhuzamos affinitásról, egyéb esetben ferde affinitásról beszélünk (9. ábra)



9. ábra A tengelyes affinitás tengelye és iránya

Indirek úton bizonyítható, hogy a tengelyes affinitásnak a tengelyen kívül nincs fix pontja.

2.4.3 Az osztóviszony

Definíció: Az *(A;B)* egyenes valamely $P \neq B$ pontjának az *A, B* alappontokra vonatkozó osztóviszonyán az $\frac{AP}{PB}$ irányított szakaszok előjeles hányadosát értjük.

Jelölés: $\frac{AP}{PB} = (ABP)$

Az osztóviszony előjele nem függ az egyenes irányításától, mert megváltoztatva az egyenes irányítását mindkét irányított szakasz előjelet vált, így hányadosuk előjele nem változik.
Az osztóviszony egy arányt jelöl, nem függ az egység megadásától.

A párhuzamos szelők tételének következményeként igazolható, hogy a tengelyes affinitás osztóviszonytartó. Szintén a párhuzamos szelők tételének következménye a következő tétel:

Tétel: Ha a tengelyes affinitás iránya nem párhuzamos az affinitás tengelyével, akkor bármely nem fix P pontot a P' képponttal összekötő egyenesnek és a tengelynek a P_t metszéspontjára a $(PP'P_t)$ osztóviszony a P ponttól függetlenül állandó.

Minden P és Q pont esetén igaz: $\frac{PP'}{P'P_t} = \frac{QQ'}{Q'Q_t}$

2.4.4 Az affinitás megadása

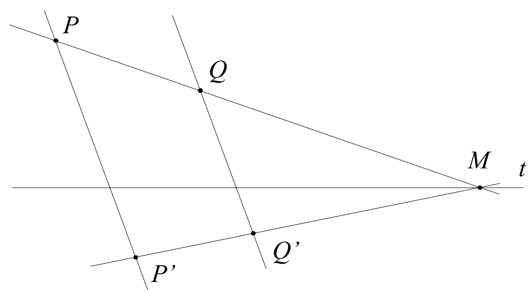
Az előző tétel következménye, hogy a tengelyes affinitás egyértelműen megadható a tengelyével és egy nem fix megfelelő pontpárjával.

Adott t tengelyű tengelyes affinitás t tengelyének és a nem fix P, P' pontpárok ismeretében egy tetszőleges Q pont képe megszerkeszthető (10. ábra):

$(P,Q) \cap t = M$ fix pont

$f \parallel (P,P'),\ Q \in f$

$(P',M) \cap t = Q'$

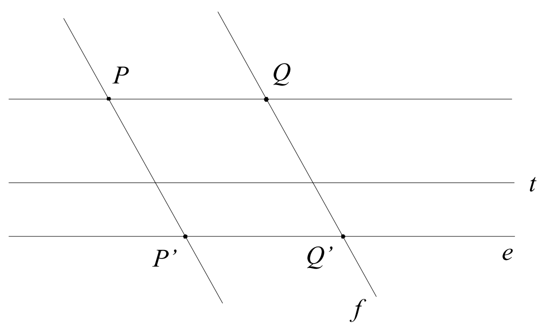


$(P,Q) \parallel t \Rightarrow (P',Q') \parallel t$

$P' \in e, \quad e \parallel t$

$(P,P') \parallel (Q,Q') = f$

$e \cap f = Q'$



10. ábra Eljárás egy tetszőleges Q pont képének megszerkesztésére tengelyes affinitásnál

A tengelyes affinitás megadható továbbá tengelyével, irányával és a $(PP'P_t)$ osztóviszonnyal.

A merőleges tengelyes affinitás megadható a $(PP'P_t)$ osztóviszonnyal.

Minden affinitás megadható három nem kollineáris pontpárral.

Tétel: Minden affinitás előállítható egy hasonlósági transzformáció és egy tengelyes affinitás szorzataként.

A hasonlóság aránytartó tulajdonságának (osztóviszonytartás), az affinitások osztóviszony-tartásának és az előállításukra vonatkozó tétel következményeként mondható ki, hogy minden affinitás osztóviszonytartó.

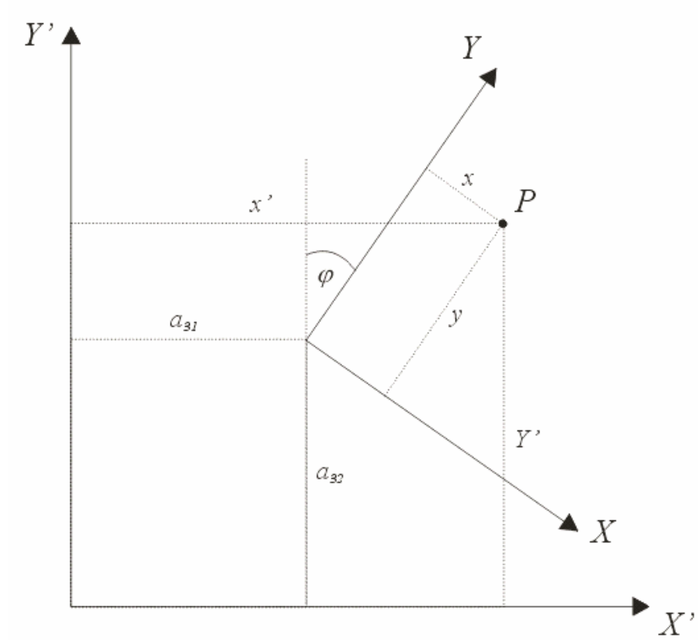
2.5 Transzformációs egyenletek

A valós földrajzi tér vizsgált objektumait különböző vonatkoztatási rendszerekbe helyezve, a rendszerbeli koordinátáival azonosítjuk. A geoinformatikai feldolgozás során a transzformálandó objektumok vonatkoztatási rendszerét koordináta-transzformáció útján képezzük le a kívánt koordináta-rendszerbe. A transzformációt akkor tudjuk végrehajtani, ha meg tudunk adni olyan pontokat, amelyeknek ismerjük mindkét vonatkoztatási rendszerbeli koordinátáit. Az ilyen pontokat referenciapontoknak vagy illesztési pontoknak nevezzük.

Ha az adatgyűjtés eredményeként (digitalizált térképen, szkennelt légifelvételen, műholdképen, stb.) egy térelemhez a $P(x;y)$ pontot rendeljük hozzá valamely vonatkoztatási rendszerben megadott koordinátákkal, és a továbbiakban ugyanennek a térelemnek egy másik, az ún. korrigált rendszerben a $P'(x';y')$ pontot kívánjuk megfeleltetni, akkor meg kell adnunk azt az összefüggést, azt az egyenletet, amely a megfelelő koordinátákat átviszi egymásba.

Ha a koordinátákat ismerjük, akkor ezekből ki tudjuk számítani az egyenletek együtthatóit és az így meghatározott transzformációs egyenlet alapján a további, forráskoordinátákkal megadott pontoknak meg tudjuk határozni a korrigált vonatkoztatási rendszerbeli helyét, ottani koordinátáit kiszámítva. Az illesztési pontok száma valamint az adatforrás meghatározza a lehetséges transzformáció módját.

A sík legegyszerűbb transzformációi a hasonlósági transzformációk. Ebben az esetben az eredeti és a kép koordináta-rendszer közötti kapcsolatot elforgatással, méretarány-váltással (nagyítás vagy kicsinyítés) és eltolással, illetve ezek egymás utáni elvégzésével adhatjuk meg. A két koordináta-rendszer kezdőpontja nem esik egybe (eltolás), az eredeti és a korrigált koordináta-rendszer megfelelő tengelyei φ szöget zárnak be egymással (φ szögű elforgatás), valamint tengelyirányú léptékváltás történhet. A 11. ábra a hasonlósági transzformáció elvét szemlélteti a később is használatos jelölésekkel.



11. ábra A hasonlósági transzformáció elve

A hasonlósági transzformációkkal megegyező, de a különböző tengelyeken eltérő mértékű léptékváltást is engedélyező koordináta-transzformáció az affin transzformáció.

Az említett transzformációk közös tulajdonsága, hogy egyenesek transzformáció utáni képe is egyenes lesz. (Az affinitások osztóviszonytartási tulajdonságának ismeretében ez az adatszerkezet szempontjából azt is jelenti, hogy a jelölt pontok száma nem fog növekedni. Két pont által kijelölt szakasz képe a pontok képe által meghatározott szakasz lesz.) A transzformációt megadó egyenletben minden koordináta legfeljebb az első hatványon szerepel, s így ezeket elsőrendű transzformációknak is nevezzük. Az elsőrendű transzformációk megadásához szükséges transzformációs egyenlet együtthatóit minimálisan 6 paraméterből, tehát 3 pont-képpont párból lehet meghatározni.

A koordináták alapján kapott lineáris egyenletrendszert az $\begin{array}{l} x' = a_0 + a_1 x + a_2 y \\ y' = b_0 + b_1 x + b_2 y \end{array}$ alakban lehet felírni, ahol az ismeretlenek az *x, y* koordináták együtthatói. Az együtthatókat mátrix alakban felírva kapjuk a transzformáció mátrixát.

A lineáris transzformációkhoz hasonlóan a magasabb fokú polinomokkal megadott transzformációk is a forrás- és referenciakoordináták segítségével felírt *n*-ed fokú polinomokkal adják meg a kapcsolatot a két koordináta-rendszer között. A kapott egyenletrendszer együtthatói a forráskoordináták lesznek, ismeretleneit pedig a transzformációs egyenlet meghatározandó együtthatói alkotják. Ezeket szintén írhatjuk mátrix alakba. Az így kapott mátrix a transzformáció mátrixa.

A polinomok fokszáma és az együtthatók meghatározásához minimálisan szükséges illesztő pontok száma között összefüggés van.
Ha a polinom fokszáma n a pontok számát pedig p-vel jelöljük, akkor a p értéke kiszámítható:

$$p = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$ (Bizonyítás a *Magasabb rendű, polinommal megadott transzformáció* témakörben!)

2.5.1 Lineáris koordináta-transzformációk

Legyen V és W két vektortér a T test felett. A $\Psi : V \to W$ leképezést akkor nevezzük lineáris transzformációnak, ha a $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$ és $\lambda \in \mathrm{T}$ esetén érvényes a következő összefüggés:

$$\Psi\left(\vec{v}_1 + \vec{v}_2\right) = \Psi\left(\vec{v}_1\right) + \Psi\left(\vec{v}_2\right) \qquad \text{és} \qquad \Psi\left(\lambda \vec{v}_1\right) = \lambda \Psi\left(\vec{v}_1\right)$$

Adott *n*-dimenziós vektortérben, adott bázis (lineárisan független vektorrendszer) esetén az *n*-dimenziós vektorok lineáris transzformációi leírhatóak *nxn*-es mátrixokkal. A *2*-dimenziós sík esetén a síktranszformációk többségét *2x2*-es mátrix megadásával lehet elvégezni. (Látni fogjuk, hogy az így megadott transzformáció egyedül az origót hagyja változatlanul, tehát síkbeli eltolást nem tudunk megvalósítani *2x2*-es mátrixszal.)

A $P(x;y)$ és $P'(x';y')$ pontok közötti lineáris transzformáció megadható a következőkkel:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \qquad \text{ahol} \qquad \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Abban az esetben, ha $a_{11} = a_{22} = 1,\ a_{12} = a_{21} = 0 \quad \Rightarrow \quad x' = x, \quad y' = y$,

vagyis ha a transzformáció mátrixa az $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{E}}_2$ (másodrendű egységmátrix)

identikus transzformációról beszélünk.

A mátrixszorzás szerint az új koordináták értéke kiszámítható:

$$x' = a_{11}x + a_{21}y$$
$$y' = a_{12}x + a_{22}y$$

A lineáris transzformációt leíró $\underline{\underline{A}}$ mártix speciális esetei az ún. elemi koordináta-transzformációk, amelyeket az 3. táblázat és a hozzá tartozó 12. ábra mutat be.

3. táblázat Lineáris transzformációt megadó mátrix speciális esetei

$a_{12} = a_{21} = 0 \quad \Rightarrow \quad x' = a_{11}x, \quad y' = a_{22}y$	x és y tengely irányú léptékváltás
$a_{11} = a_{12} = a_{21} = a_{22} = 0$	elfajuló transzformáció
$a_{12} = a_{21} = 0$ *és* $\lvert a_{11} \rvert = \lvert a_{22} \rvert$	a tengelyek mentén azonos skálázás
$a_{12} = a_{21} = 0$ *és* $\lvert a_{11} \rvert > 1$ $\lvert a_{22} \rvert > 1$	x tengely irányú nagyítás y tengely irányú nagyítás
$a_{12} = a_{21} = 0$ *és* $0 < \lvert a_{11} \rvert < 1$ $0 < \lvert a_{22} \rvert < 1$	x tengely irányú kicsinyítés y tengely irányú kicsinyítés
$a_{12} = a_{21} = 0$ *és* $a_{11} < 0$ $a_{12} < 0$	tükrözés az *y* tengelyre tükrözés az *x* tengelyre
$a_{12} = a_{21} = 0$ *és* $\lvert a_{11} \rvert \neq \lvert a_{22} \rvert$	a skálázás eltér a két tengelyen (affin transzformáció)
$a_{11} = a_{22} = 0 \quad \Rightarrow \quad x' = a_{12}y, \quad y' = a_{21}x$	vetítés (léptékváltás majd tükrözés az *x*=*y* egyenesre)
$a_{11} = a_{12} = a_{21} = a_{22} = 0$	elfajuló transzformáció
$a_{11} = a_{22} = 1,\ a_{12} \neq 0, a_{21} \neq 0 \quad \Rightarrow$ $\Rightarrow \quad x' = x + a_{12}y, \quad y' = a_{21}x + y$	nyírás (affin transzformáció)

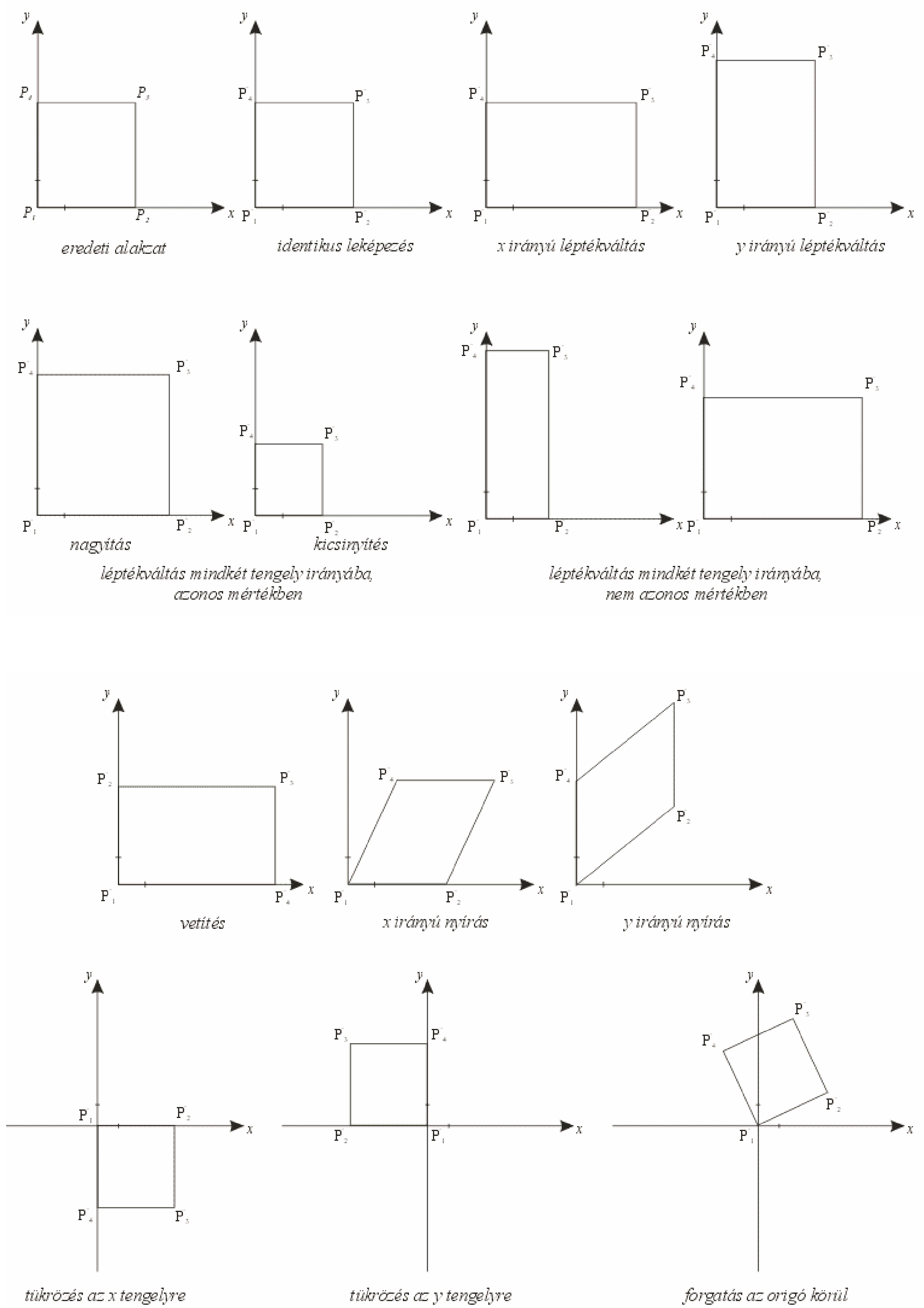
Az origó körüli φ szögű elforgatás szintén megadható a $[x \quad y]\underline{\underline{A}} = [x' \quad y']$ mátrixszal, ahol:

$a_{11} = \cos\varphi, \quad a_{12,} = \sin\varphi, \quad a_{21} = -\sin\varphi, \quad a_{22} = \cos\varphi$,

tehát a transzformáció mátrixa: $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$,

Az új koordinátákat (13. ábra) – a mátrixszorzást elvégezve – kapjuk:

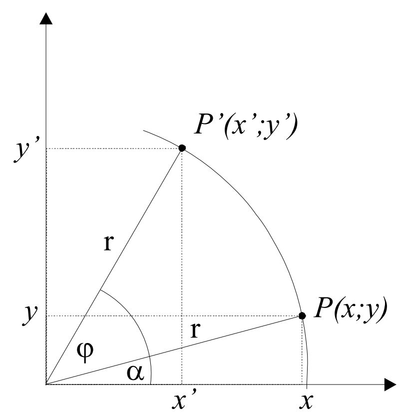
$$x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi$$
$$y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi$$



12. ábra Elemi koordináta transzformációk

Egy φ szögű, origó körüli elforgatást λ méretarány-változás (λ-tól függően nagyítás, kicsinyítés vagy egybevágóság) mellett a következő transzformációs mátrixszal, illetve egyenlettel adhatunk meg:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \lambda\cos\varphi & \lambda\sin\varphi \\ -\lambda\sin\varphi & \lambda\cos\varphi \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} x' &= x\lambda\cos\varphi - y\lambda\sin\varphi \\ y' &= x\lambda\sin\varphi + y\lambda\cos\varphi \end{aligned}$$



$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x'^2 + y'^2}$$

$$\sin\alpha = \frac{y}{r} \qquad \cos\alpha = \frac{x}{r}$$

$$\sin(\alpha+\varphi) = \frac{y'}{r} \qquad \cos(\alpha+\varphi) = \frac{x'}{r}$$

$$\sin(\alpha+\varphi) = \sin\alpha\cdot\cos\varphi + \cos\alpha\cdot\sin\varphi$$
$$\cos(\alpha+\varphi) = \cos\alpha\cdot\cos\varphi - \sin\alpha\cdot\sin\varphi$$

$$\frac{x'}{r} = \frac{x}{r}\cos\varphi - \frac{y}{r}\sin\varphi$$
$$\frac{y'}{r} = \frac{x}{r}\sin\varphi + \frac{y}{r}\cos\varphi$$

$$x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi$$
$$y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi$$

14. ábra Az origó körüli forgatás utáni koordináták kiszámításának elve

A méretarány-változás szakaszok transzformáció utáni és előtti hosszának arányával is megadható. Ha a $P(x_P; y_p)$, $Q(x_Q; y_Q)$ pontok koordináta-transzformáció utáni képei a $P'(x'_{P'}; y'_{P'})$, $Q'(x'_{Q'}; y'_{Q'})$ pontok, akkor a méretarány-változás λ értéke egyszerűen kiszámítható a képszakasz és az eredeti szakasz hosszának hányadosával:

$$\lambda = \frac{d(P',Q')}{d(P,Q)} = \frac{\sqrt{(x'_{P'} - x'_{Q'})^2 + (y'_{P'} - y'_{Q'})^2}}{\sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2}}$$

A mátrixszorzás nem kommutatív, a transzformációk nem felcserélhetőek, sorrendjük fontos. A sorrendet felcserélve a szorzat általában különböző transzformációkat eredményez.

Például:

Origó körüli 90 fokos forgatás negatív irányba, majd tükrözés az x tengelyre:

$$[x \quad y]\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = [-y \quad x]$$ origó körüli 90 fokos forgatás negatív irányba

$$[-y \quad x]\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [y \quad x]$$ tükrözés az x tengelyre

$$[\mathrm{x} \quad \mathrm{y}]\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [\mathrm{x} \quad \mathrm{y}]\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = [y \quad x]$$ tükrözés az $y = x$ tengelyre

Tükrözés az x tengelyre majd origó körüli 90 fokos forgatás negatív irányba:

$$[x \quad y]\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [-x \quad y]$$ tükrözés az x tengelyre

$$[-x \quad y]\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = [-y \quad -x]$$ origó körüli 90 fokos forgatás negatív irányba

$$[x \quad y]\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = [x \quad y]\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = [-y \quad -x]$$ tükrözés az $y = -x$ tengelyre

2x2-es mátrix szorzásával az x és y koordináták olyan transzformációit tudjuk csak végrehajtani, amely az origót helyben hagyja. Nem tudunk megadni olyan *2x2*-es mátrixot, amellyel szorozva a koordinátákat egy eltolásvektor hatását eredményezné. A homogén koordináták bevezetése kiküszöböli ezt a hiányosságot.

2.5.2 Homogén koordináták

Definíció: Ha $h \neq 0$, akkor az $(x; y; h)$ számhármast a $P\left(\frac{x}{h}; \frac{y}{h}\right)$ síkbeli pont homogén koordinátáinak nevezzük.
Jelölés: $(\hat{x}; \hat{y}) \sim (x; y; h)$

Az $(\hat{x}; \hat{y})$ tetszőleges síkbeli pontnak végtelen sokféle homogén-koordinátás alakja van, a definíció alapján ugyanis:

$$(\hat{x}; \hat{y}) \sim (\lambda x; \lambda y; \lambda h) \quad (\lambda \in \mathbf{R}), \qquad \text{mert} \quad (\lambda x; \lambda y; \lambda h) \sim \left(\frac{\lambda x}{\lambda h}; \frac{\lambda y}{\lambda h}\right) = \left(\frac{x}{h}; \frac{y}{h}\right) = (\hat{x}; \hat{y}).$$

Definíció: Az $(\hat{x}; \hat{y})$ síkbeli pont normalizált homogén koordinátáinak nevezzük a $(x; y; h)$ számhármast, ha a homogenitás mellett a $h = 1$ feltétel is teljesül.

Az eddigiek alapján minden síkbeli pontnak létezik normalizált homogén koordinátás alakja:
$(\hat{x}; \hat{y}) \sim (\hat{x}; \hat{y}; 1)$

A homogén koordináták transzformációi is leírhatók mátrixokkal. A korábbi, *2x2*-es mátrixműveletek adta transzformációs lehetőségek továbbra is elvégezhetőek, mivel azok a "homogén 1-et " változatlanul hagyják:

$$\begin{bmatrix} \hat{x} & \hat{y} \end{bmatrix} \underline{\underline{A}} \sim \begin{bmatrix} \hat{x} & \hat{y} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Az $\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ transzformációs mátrix négy fő részre osztható (4. táblázat), attól függően, hogy a koordináta-transzformáció során milyen jellegű változásokat eredményeznek az együtthatók.

4. táblázat A transzformációs mátrix felosztása

I.	léptékváltás, nyírás, origó körüli forgatás, tükrözés	$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$	
II.	eltolás az $(a_{31}; a_{32})$ helyvektorral	a_{31}, a_{32}	
III.	azonos mértékű (1/a_{33}-arányú) léptékváltás mindkét koordináta irányába	a_{33}	$(a_{33} \neq 0)$
IV.	síkbeli perspektív transzformáció (centrális projekció)	a_{13}, a_{23}	$(a_{13} \neq 0,\ a_{23} \neq 0)$

I. Ezen transzformációkról a *Lineáris koordináta-transzformációk* témakörben van szó.

II. Eltolás az $(a_{31}; a_{32})$ helyvektorral:

$$\begin{bmatrix} \hat{x} & \hat{y} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x} + a_{31} & \hat{y} + a_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

III. Léptékváltás mindkét koordináta irányába 1/a_{33}-arányban:

$$\begin{bmatrix} \hat{x} & \hat{y} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x} & \hat{y} & a_{33} \end{bmatrix}$$

IV. * Síkbeli perspektív transzformáció (centrális projekció)

$$\begin{bmatrix} \hat{x} & \hat{y} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & a_{13} \\ 0 & 1 & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x} & \hat{y} & a_{13}\hat{x} + a_{23}\hat{y} + 1 \end{bmatrix}$$

Ez a pont a síkbeli $\left(\dfrac{\hat{x}}{a_{13}\hat{x} + a_{23}\hat{y} + 1} ; \dfrac{\hat{y}}{a_{13}\hat{x} + a_{23}\hat{y} + 1} \right)$ pontnak felel meg. Belátható, hogy a két együttható növelésével a transzformált pont egyre közelebb kerül az origóhoz, tehát a transzformáció centrális projekció.

2.6 Magasabb rendű, polinommal megadott transzformáció

2.6.1 A transzformáció foka

Az elsőrendű transzformációk alkalmazását olyan esetekben tehetjük meg, amikor a szükséges változtatások lineáris jellegűek és a transzformáció során megengedhető, hogy egyenes képe szintén egyenes legyen. Az ilyen tulajdonságú transzformációkat leíró egyenletekben minden koordináta legfeljebb az első hatványon szerepel. Nemlineáris torzulások esetén olyan transzformációkra van szükség, amelyek nem lineáris változtatásokkal ezeket korrigálni tudják. A koordinátáinak transzformációjához itt is egyenleteket – polinomokat – használunk. A torzultságától, az illesztési pontok számától és egymáshoz viszonyított elhelyezkedésüktől függő összetett polinomok szükségesek a kellő transzformáció végrehajtásához. Ezekben a polinomokban már nem csak első hatványon szerepelnek a koordináták. A legmagasabb kitevő adja meg a polinom fokszámát, az pedig a transzformáció fokát. Általában első- és másodfokú transzformációkat alkalmazunk

Ha egy illesztési pont forráskoordinátáit $(x; y)$-nal jelöljük, a referencia-koordinátákat pedig $(x'; y')$-vel, akkor ezek alapján a következő két polinomot tudjuk felírni:

$$x' = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 xy + a_5 y^2 + a_6 x^3 + a_7 xy^2 + a_8 x^2 y + a_9 y^3 + \ldots$$
$$y' = b_0 + b_1 x + b_2 y + b_3 x^2 + b_4 xy + b_5 y^2 + b_6 x^3 + b_7 xy^2 + b_8 x^2 y + b_9 y^3 + \ldots$$

A transzformáció mátrixát az illesztési pontok koordinátái alapján számítjuk ki. A mátrix a koordináta-transzformációhoz használt polinom (transzformációs függvény) együtthatóiból áll. Mérete függ a transzformáció fokától.

A transzformációs függvényben a sokadfokú tagokat a forráskoordináták alkotják. Az illesztési pontok forrás- és referenciakoordinátáit megadva a sokadfokú tagok ismerté válnak, és együtthatóik lesznek a transzformációs függvény meghatározandó ismeretlenei. Ezek az ismeretlenek (a_i, b_i) már első hatványon szerepelnek és a megadott forráskoordinátákkal lineáris egyenleteket alkotnak. Több illesztési pont megadásával lineáris egyenletrendszerhez jutunk. E lineáris egyenletrendszer megoldhatóságát és megoldásait kell vizsgálnunk.

Pl.: másodfokú transzformáció esetén az a_i -k és b_i -k ($i \in [0;1;2;3;4;5]$) az ismeretlenek.

$$x' = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 xy + a_5 y^2$$
$$y' = b_0 + b_1 x + b_2 y + b_3 x^2 + b_4 xy + b_5 y^2$$

Forrás-koordináták		**Referencia-koordináták**	
x	y	x'	y'
1	2	3	7
2	3	10	11
3	4	12	17
4	5	15	21
5	6	19	26
6	7	22	39

$$3 = a_0 + a_1 + 2a_2 + a_3 + 2a_4 + 4a_5$$
$$7 = b_0 + b_1 + 2b_2 + b_3 + 2b_4 + 4b_5$$
$$10 = a_0 + 2a_1 + 3a_2 + 4a_3 + 6a_4 + 9a_5$$
$$11 = b_0 + 2b_1 + 3b_2 + 4b_3 + 6b_4 + 9b_5$$
$$12 = a_0 + 3a_1 + 4a_2 + 9a_3 + 20a_4 + 16a_5$$
$$17 = b_0 + 3b_1 + 4b_2 + 9b_3 + 20b_4 + 16b_5$$
$$15 = a_0 + 4a_1 + 5a_2 y + 16a_3 + 20a_4 + 25a_5$$
$$21 = b_0 + 4b_1 + 5b_2 y + 16b_3 + 20b_4 + 25b_5$$
$$19 = a_0 + 5a_1 + 6a_2 y + 25a_3 + 30a_4 + 36a_5$$
$$26 = b_0 + 5b_1 + 6b_2 y + 25b_3 + 30b_4 + 36b_5$$
$$22 = a_0 + 6a_1 + 7a_2 y + 36a_3 + 42a_4 + 49a_5$$
$$39 = b_0 + 6b_1 + 7b_2 y + 36b_3 + 42b_4 + 47b_5$$

2.6.2 A lineáris egyenletrendszer megoldhatósága

Definíció: Szabályosnak nevezünk egy lineáris egyenletrendszert, ha az egyenletek száma megegyezik az ismeretlenek számával és az egyes egyenletek lineárisan függetlenek egymástól.

A lineáris algebrából ismert tétel, Cramer szabálya értelmében a szabályos lineáris egyenletrendszer megoldható és pontosan egy megoldása van az együtthatóknak. A megoldás elvégezhető a Gauss-elimináció módszerével, vagy a Cramer szabályában megadott determinánsokat felhasználva. A transzformációs függvény együtthatói szabályos egyenletrendszer ismeretleneit alkotják, ha megfelelő számú illesztési pontot adunk meg. Az így kapott együtthatókat visszaírva a transzformációs függvénybe a transzformálandó felület bármely pontjának meg tudjuk adni a képét.

A kérdés már csak az marad a felhasználó számára, hogy minimálisan hány illesztési pont megadására van szükség egy adott fokú transzformáció elvégzéséhez?

Az előzőek alapján a kérdést úgy is meg lehet fogalmazni, hogy hány együtthatója van maximálisan egy *n*-ed fokú polinomnak?

Az $\begin{matrix} x' = a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2 + a_6x^3 + a_7xy^2 + a_8x^2y + a_9y^3 + \dots \\ y' = b_0 + b_1x + b_2y + b_3x^2 + b_4xy + b_5y^2 + b_6x^3 + b_7xy^2 + b_8x^2y + b_9y^3 + \dots \end{matrix}$ alakú

polinomokat *n*-ed fokú esetben felírhatjuk a következő összeg formájában:

$$x' = \sum_{k,l\geq 0}^{k+l\leq n} a_{kl}x^k y^l 1^{n-k-l} \qquad y' = \sum_{k,l\geq 0}^{k+l\leq n} b_{kl}x^k y^l 1^{n-k-l}$$

Az x^k és az y^l szorzatának összes olyan kombinációja szerepel a polinomokban, amelyre $k + l \leq n$. Ezek számát megadhatjuk, ha 3 elem (*x; y; 1*) n-tagú ismétléses kombinációinak számával:

t elem n-tagú ismétléses kombinációinak száma; $C_t^{n(i)} = \binom{t+n-1}{n} = \frac{(t+n-1)!}{n!(t-1)!}$.

Esetünkben $t = 3$. Három elemből (*x; y; 1*) képzett n-tagú ismétléses kombinációk száma:

$\binom{3+n-1}{n} = \binom{n+2}{n} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Ennyi együtthatója lesz egy egyenletnek.

Minden *n*-ed fokú transzformáció esetén egy illesztőponthoz két egyenlet tartozik, egyenletenként $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$, összesen $(n+1)(n+2)$ számú különböző együtthatóval.

Egyértelműen megoldható, szabályos lineáris egyenletrendszert kapunk, ha az egyenletek száma szintén $(n+1)(n+2)$.

Mivel egy pontpár (ismert forrás- és referenciakoordinátákkal rendelkező illesztési pont) két egyenletet határoz meg, ezért $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ darab illesztési pont megadására van szükség a transzformációs függvény egyértelmű meghatározásához.

Összefoglalva: ha a transzformáció foka *n,* a meghatározáshoz szükséges pontok számát pedig *p*-vel jelöljük, akkor a *p* értéke kiszámítható: $p = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

2.6.3 Az RMS hiba

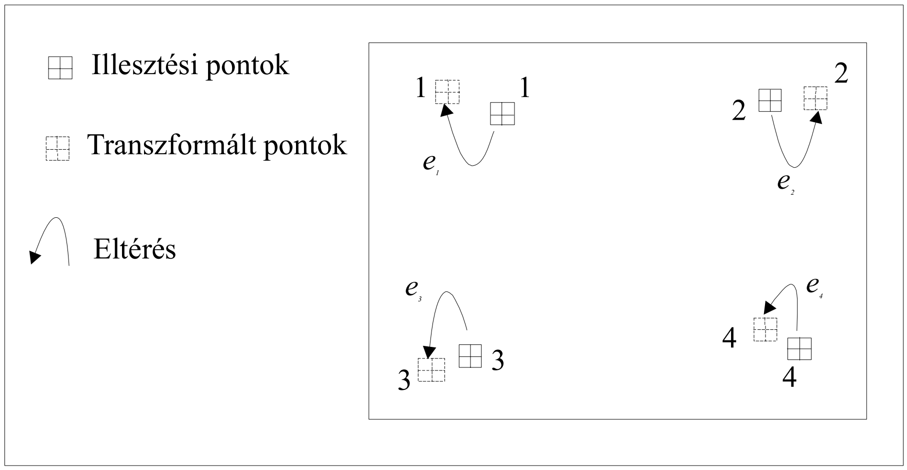
A gyakorlatban a transzformáció elvégzéséhez általában több illesztési pontot használunk, mint amennyit a transzformáció fokszáma megkíván. Ilyenkor több egyenletet tudunk felírni, mint ahány együttható van. Elvileg bármelyik egyenlet helyettesítheti a másikat a transzformációs függvény együtthatóinak kiszámításánál, a transzformációs függvény egyértelműen meghatározható. A transzformáció során nem lép fel mérhető hiba. A valóságban azonban ritkán tudunk olyan szerencsésen illesztési pontokat kiválasztani, hogy a különböző egyenletek alapján kiszámított transzformációs függvények között ne legyen eltérés, illetve az adatrögzítési technikák elkerülhetetlen hibaforrásai miatt mindig valamilyen hibával kell dolgoznunk. A cél az, hogy a hibát definiálni tudjuk és a lehető legkisebb értéken tartsuk munkánk során.

A transzformációhoz minimálisan szükségesnél több pont megadásakor a statisztikában használt legkisebb négyzetek módszere szerint történik a pontokra legjobban illeszkedő görbe (a transzformációs függvény) meghatározása. A legkisebb négyzetek módszere a pontok és a görbe távolságát minimalizálja. Azt a görbét keressük, amelyre igaz, hogy ha a pontoknak a görbétől mért távolságait négyzetre emeljük, majd a kapott számokat összegezzük, akkor ez az összeg a minimális lesz, vagyis nincs olyan másik görbe, amelyre kisebb ilyen összeget kapnánk.

A transzformációs függvény meghatározásában így minden illesztési pont részt vesz, de nem fog illeszkedni minden pont a transzformációs függvény görbéjére.
Az ún. RMS (Root Mean Square) hiba értékét a transzformációs függvény alapján számított hely és a referenciaként megadott hely számított távolságainak négyzetösszegének számtani közepéből vont négyzetgyökeként lehet megadni. Ha *F(x)* a transzformáció függvénye, egy *P* pont forráskoordinátáit $(x_P; y_P)$-vel, referenciakoordinátáit $(x'_P; y'_P)$-vel jelöljük, akkor az eltérés: $e_P = \sqrt{\left(F(x_P) - x'_P\right)^2 + \left(F(y_P) - y'_P\right)^2}$

Az RMS hiba értékét *p* számú pont esetén a következő képlettel lehet kiszámítani (14. ábra):

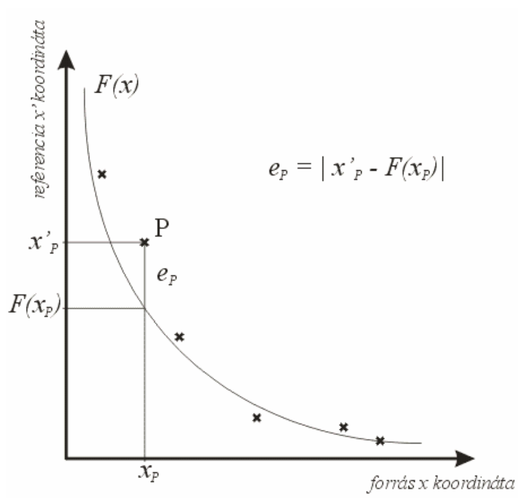
$$RMS = \sqrt{\frac{e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + \ldots + e_p^2}{p}}$$



14. ábra Az RMS hiba kiszámítása

Az RMS hiba egy másik kiszámítási módja szerint az eltérés értékét a transzformációs függvény inverzével számítjuk ki úgy, hogy a referenciakoordinátákat az inverz transzformációval visszatranszformáljuk a forráspontok koordináta-rendszerébe és az ott kapott különbségek adják az e_i eltéréseket.

Az *x* (15. ábra) és y koordinátákra külön-külön is kiszámítható az eltérés értéke.



15. ábra Az x irányú eltérés értékének meghatározása

Alkalmazás

Adatokat digitális formában akkor használunk, ha a megoldandó feladatunk jellege megkívánja az adatok számítógépes feldolgozását, tárolását vagy lekérdezését, a megjelenítéshez szükségünk van a számítógépes grafika adta lehetőségekre vagy reményünk van meglévő adatainkból valamely geoinformatikai eljárás során új információhoz jutni. Digitalizálásra akkor kerül sor, ha az előzőek mellett nem áll rendelkezésünkre (mert nincs, mert nem adják, mert drága, mert fogalmunk nincs, honnan lehetne beszerezni...) a megfelelő digitális állomány.

A földrajzi információs rendszerek digitális térbeli adatokkal dolgoznak. A digitális térkép által tartalmazott információk lehetnek földrajziak (koordinátákkal meghatározott, térbeli) vagy leíró jellegűek. Az információk mindkét típusát digitalizálhatjuk, az adatbevitel eszköze pedig a meglévő adatforrástól függ (5. táblázat).

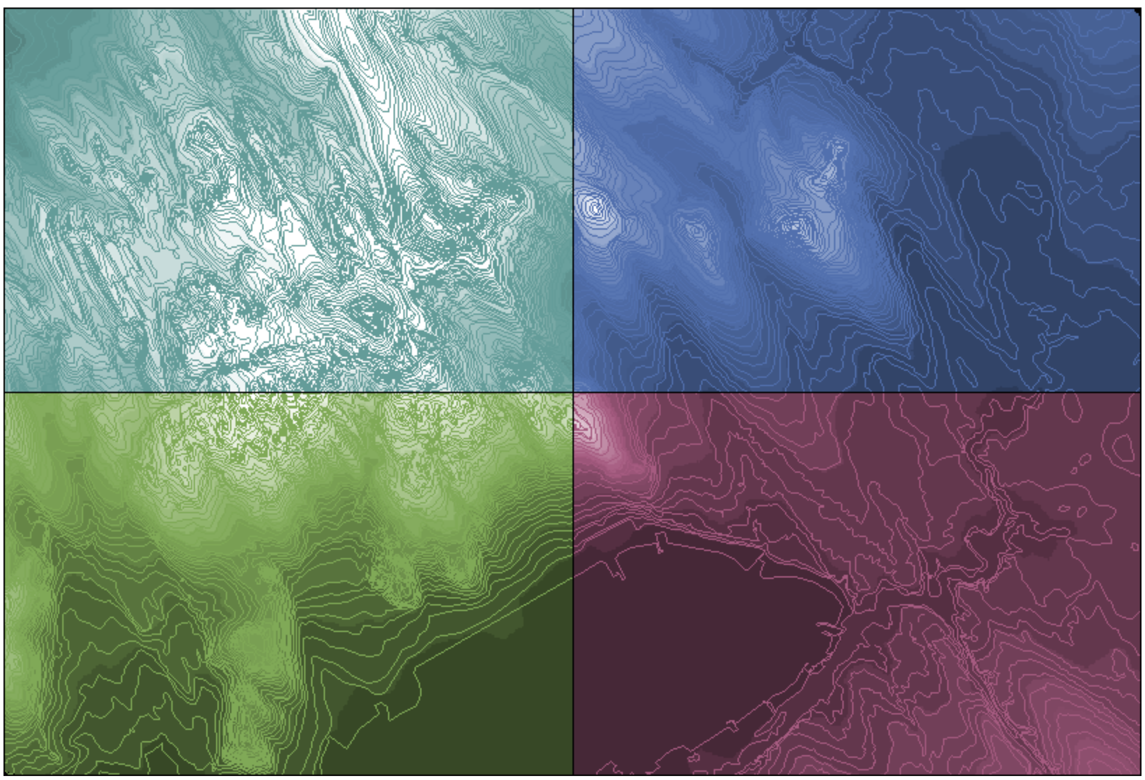
5. táblázat Különböző adatforrások és jellemző digitalizáló eszközük

Adatforrás	Koordináta-beviteli eszköz
térkép	digitalizáló
pontok koordinátáit tartalmazó analóg táblázat	billentyűzet (x,y), forrás-file
térbeli objektumokhoz rendelt leíró adatok	billentyűzet (karakteres)
kép (távérzékelt, szkennelt)	grafikus (kurzor, egér - a raszteres kép vektorizálása)
létező digitális adatok (térkép, relációs adatbázis, GPS adatok)	konvertálás, importálás (más formátum esetén)

A térképi digitalizálás megkezdése előtt érdemes előre kijelölni az illesztőpontokat. Több térképlap és eltérő vetületi rendszerek esetén különösen fontos elhelyezkedésüknek megtervezése. Az illesztőpontok földrajzi koordinátáit ismernünk kell! Az elterjedt térképészeti vetületek közül a sztereografikus rendszerben és a Gauss-Krüger vetületben készített térképeknél a szomszédos területeket ábrázoló térképlapoknál átfedések vannak, míg az EOV-ben készült térképlapok pontosan a határaikon csatlakoznak egymáshoz. Egész térképlapok digitalizálásakor célszerű a térkép "sarkait" (maximum és minimum *x; y* koordináták) választani az illesztőpontoknak. Később, a digitalizált térképlapoknak az ún. táblai koordináta rendszerből a térképi koordináta rendszerbe való transzformációjakor ezek a pontok lesznek a művelet referencia-pontjai, valamint a már transzformált térképlapok összeillesztése is ezen pontok alapján történik. A koordináta-transzformációt affin transzformációval hajtjuk végre:

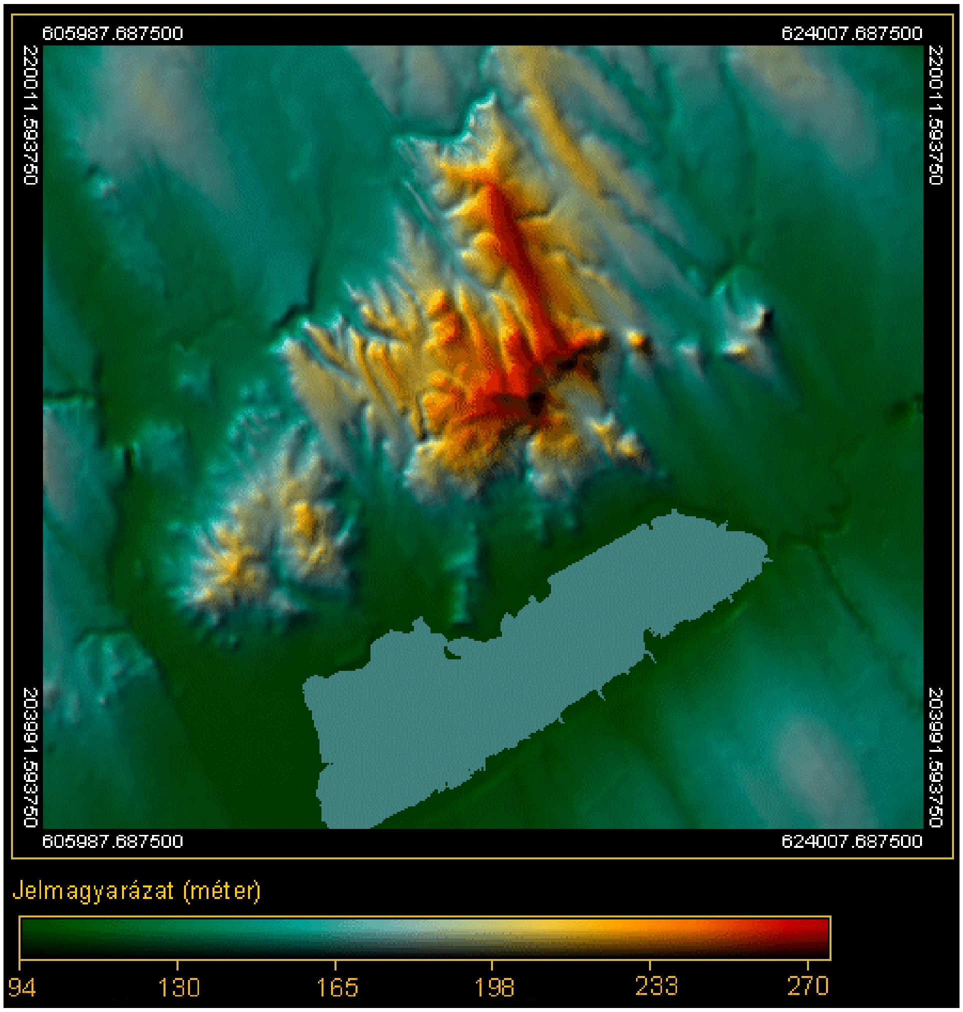
```
Transforming coordinates for coverage /home/bodis/arcdata/transform/demo
Scale (X,Y) = (254.624,253.850)  Skew (degrees) = (0.119)
Rotation (degrees) = (2.105)  Translation = (624359.533,251700.898)
RMS Error (input,output) = (0.013,3.405)

Affine  X = Ax + By + C
        Y = Dx + Ey + F
A =       254.452   B =         -8.797    C =       624359.533
D =           9.354   E =       253.698   F =       251700.898

tic id    input_x   input_y   output_x           output_y           x_error   y_error
------ ---------------- ---------------- ---------------- ---------------------- ---------------- -------------
     1    22.575    12.164    630000.000         255000.000         -3.206    -1.950
     2    22.712    16.110    630000.000         256000.000         -3.057     0.425
     3    26.647    15.968    631000.000         256000.000         -0.538     1.208
     4    26.516    12.017    631000.000         255000.000         0.884     -2.379
     5    22.861    20.038    630000.000         257000.000         0.303     -1.654
     6    22.986    23.971    630000.000         258000.000         -2.488    -2.689
     7    34.768    23.547    633000.000         258000.000         -0.799    -0.049
     8    34.651    19.622    633000.000         257000.000         3.957      3.091
     9    14.894    16.413    628000.000         256000.000         4.968      4.166
    10    15.146    24.270    628000.000         258000.000         -0.025    -0.169

Operation completed
```

A szomszédos területeket tartalmazó transzformált lapok az egybevágósági transzformációk felhasználásával a koordináták alapján kerülnek egymás mellé (16. ábra).



16. ábra Digitalizált térképlapok affin transzformáció utáni összeillesztése

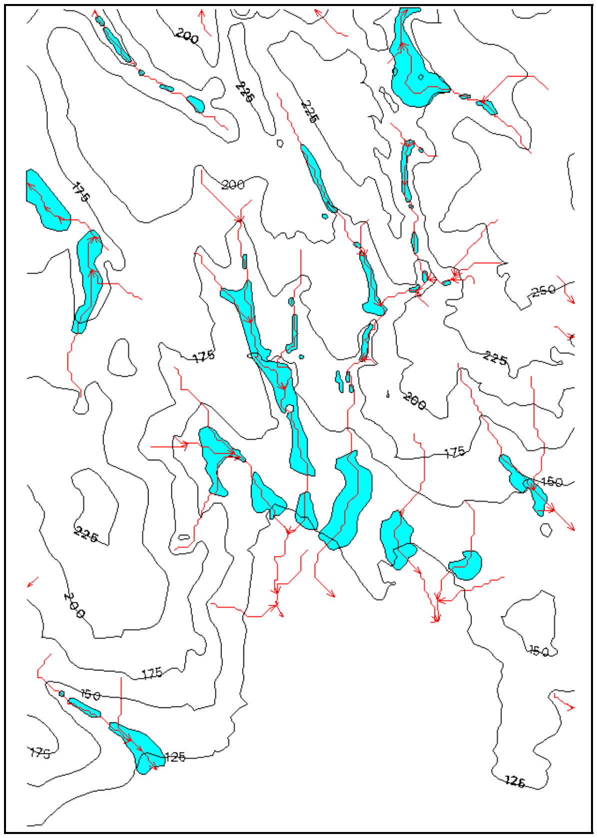
A példaként bemutatott terület a Velencei-hegység digitalizált szintvonalait tartalmazza az EOV koordináta-rendszerében. A szintvonalak alapján készült el a terület digitális domborzatmodellje (17. ábra), amelynek 3D-s rajza látható a 6. ábrán.



17. ábra Digitalizált szintvonalak alapján készült digitális domborzatmodell (Velencei-hegység)

A domborzatmodell alapján ki lehetett jelölni a felszín völgyhálózatát, majd a lefolyásviszonyokat vizsgálva sikerült lehatárolni olyan területeket, amelyek a völgyek irányában a környezetükhöz képest viszonylag alacsonyabb helyzetben helyezkednek el. Az így kiválasztott területek alkalmasak a magasabb régiókból érkező, hidegebb levegő megülésére, akkumulációjára (18. ábra).

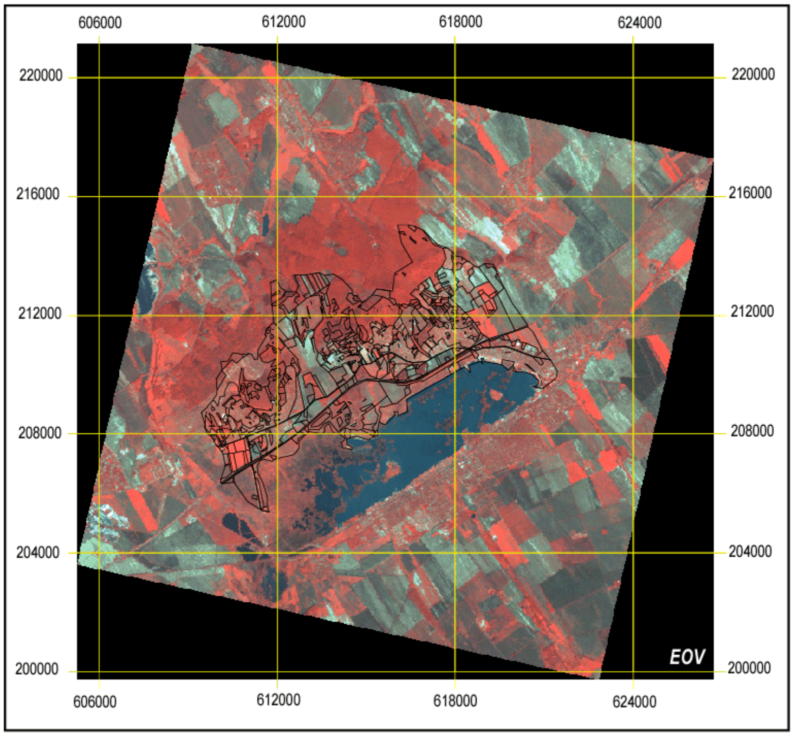
Mindez azonban akkor érdekes igazán, ha tudjuk azt is, hogy pl. milyen mezőgazdasági hasznosítású területekre esnek ezek a potenciálisan fagyveszélyes területek.



18. ábra Hideg levegő felhalmozódására alkalmas felszínek

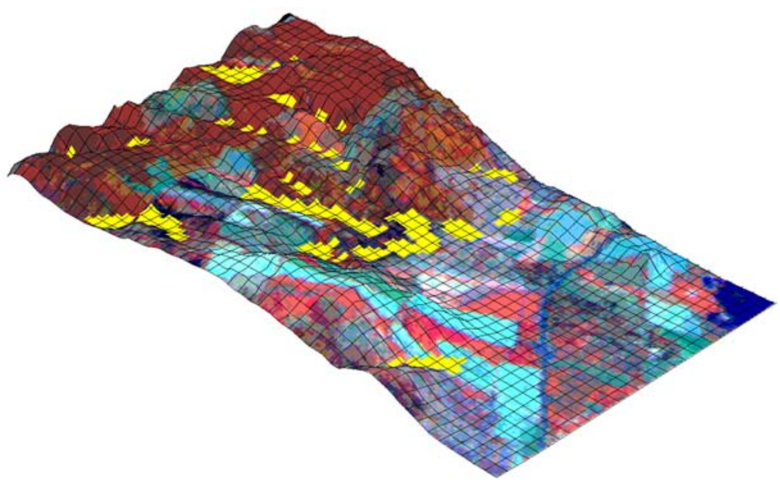
A területhasznosítás felmérésének egy módja a légi- vagy műholdfelvételek kiértékelése. A Velencei-hegységről egy 1990-ben készült LANDSAT TM műholdfelvételt mutat be a 19. ábra TM 453 (RGB) sávkombinációban, amely az ún. hamis színes kompozíció. Ebben a sávkombinációban meghatározható a szárazföld és a vízfelületek határa, vizsgálhatóak a vegetációtípusok és azok állapota, a talaj nedvességének mértéke.

A bemutatott műholdfelvétel másodfokú transzformációval lett korrigálva. Az elforgatás eredménye, hogy a kép szélei nem párhuzamosak az északi iránnyal (és a lapszélekkel…). A korrigált műholdfelvétel koordináta-rendszere szintén az EOV.



19. ábra A Velencei-hegység – Landsat TM 453 (RGB)

A műholdfelvételt és a fagyveszélyes területeket tartalmazó térképi állományt összefedetve kapjuk a 20. ábrát, amelyről első megközelítésben leolvasható, hogy ki vannak-e téve jelentős kiterjedésű, művelés alatt lévő területek az esetleges fagyveszélynek a vegetációs időszakban.



20. ábra Fagyveszélyes területek (sárga foltok)

4. Irodalomjegyzék

Álló Géza – Főglein János – Hegedűs Gy. Csaba – Szabó József:
Bevezetés a számítógépes képfeldolgozásba
BME Mérnöktovábbképző Intézet, Kézirat Budapest 1993

Berke József – Hegedűs Gy. Csaba – Kelemen Dezső – Szabó József:
Digitális képfeldolgozás és alkalmazásai
Pannon Agrártudományi Egyetem, PICTRON Kft., Budapest, 1996.

Detrekői Ákos – Szabó György: Bevezetés a térinformatikába
Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest 1995

Hajós György: Bevezetés a geometriába
Tankönyvkiadó, Budapest, 1991.

Hazay István: Földi vetületek
Akadémiai Kiadó, Budapest, 1954.

Juhász János: Vetülettan
JATE TTK, Szeged, 1981.

Klinghammer István – Papp-Váry Árpád: Földünk tükre a térkép
Gondolat, Budapest, 1983.

Lerner János: Térképészeti alapismeretek
ELTE TTK, Kézirat, Tankönyvkiadó, Budapest, 1989.

Mucsi László: Műholdas Távérzékelés és digitális képfeldolgozás I.
JATE TTK, JATEPress Szeged 1995.

Szendrei János: Algebra és számelmélet
Tanárképző főiskolai tankönyvek, Tankönyvkiadó, Budapest, 1989.

Arc/Info (Version 7) GIS by ESRI – ARC Commands
Environmental System Research Institute, Inc. 1994.

Arc/Info (Version 7.0.3) On-line Help

ERDAS IMAGINE (Version 8.1) – ERDAS Field Guide
ERDAS Inc. 1991.

Ábrajegyzék

1. ábra Az alapfelület és a képfelület helyzetének kapcsolata

2. ábra A különböző koordináta-rendszerek

3. ábra Magyarország helyzete az Egységes Országos Vetületi Rendszer (EOV) koordináta-rendszerében

4. ábra Lineáris transzformációk hatása

5. ábra Nemlineáris transzformációk hatása

6. ábra A Velencei-hegység 3D-s digitális domborzatmodellje

7. ábra Mozgások előállítása két tükrözés szorzataként

8. ábra Hasonlóság előállítása egybevágóság és centrális hasonlóság egymásutánjával

9. ábra A tengelyes affinitás tengelye és iránya

10. ábra Eljárás egy tetszőleges Q pont képének megszerkesztésére tengelyes affinitásnál

11. ábra A hasonlósági transzformáció elve

12. ábra Elemi koordináta-transzformációk – ábra a 3. táblázathoz

13. ábra Az origó körüli forgatás utáni koordináták kiszámításának elve

14. ábra Az RMS hiba kiszámítása

15. ábra Az x irányú eltérés értékének meghatározása

16. ábra Digitalizált térképlapok affin transzformáció utáni összeillesztése

17. ábra Digitalizált szintvonalak alapján készült digitális domborzatmodell

18. ábra Hideg levegő felhalmozódására alkalmas felszínek

19. ábra A Velencei-hegység – Landsat TM 453 (RGB)

20. ábra Fagyveszélyes területek

A dolgozat a szegedi Juhász Gyula Tanárképző Főiskola Matematika Tanszékére szakdolgozatnak készült 1999-ben, Dr. Szilassi Lajos témavezetésével.

[bodis@geography.hu]